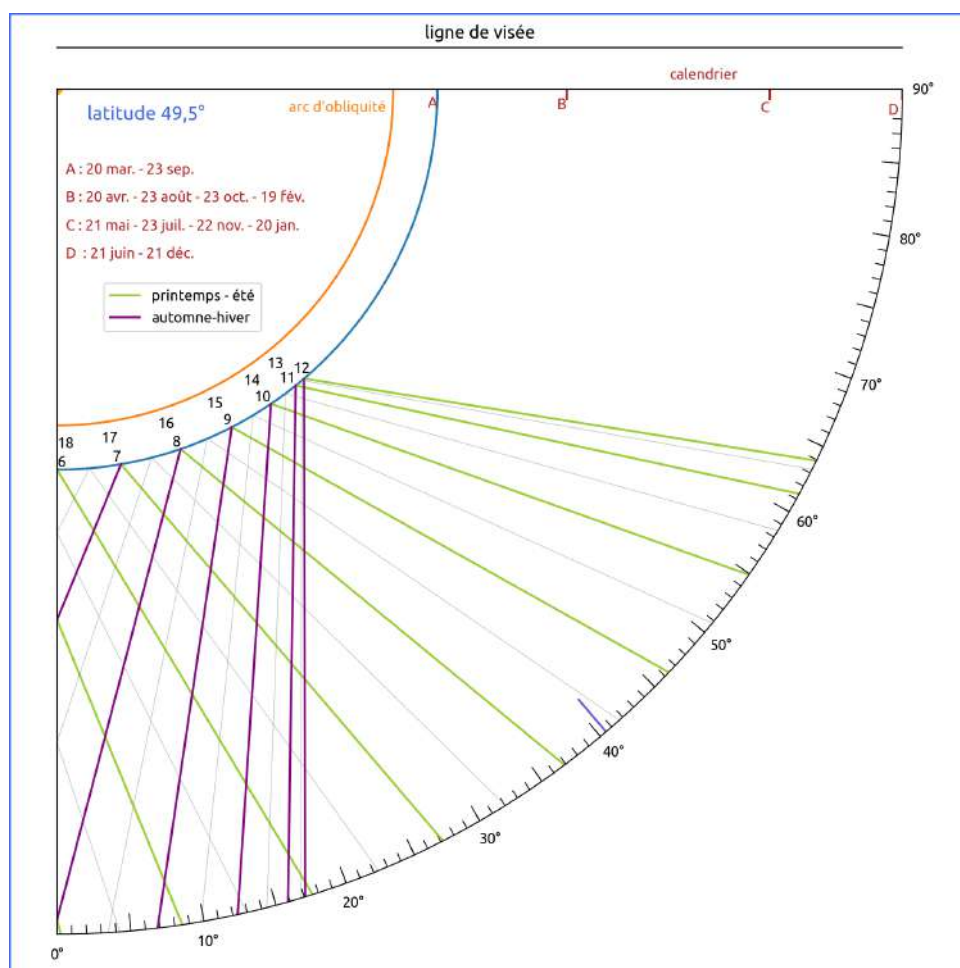


Le quadrant à double limbe :

Détermination de la hauteur méridienne



Comme tous les cadrans solaires de hauteur, ce quadrant nécessite de connaître la date d'utilisation, afin de régler correctement la position de la perle le long du fil.

La perle est positionnée correctement si elle se trouve sur la ligne « midi » lorsque le fil est tendu sur la graduation de la hauteur méridienne du jour. Si on connaît la hauteur méridienne du jour, on peut placer la perle afin de lire l'heure.

J'explique ici comment on peut déterminer la hauteur méridienne, grâce aux graduations en angle du quart de cercle.

Étape 1 : détermination de la déclinaison du jour

Pendant sa révolution annuelle autour de la Terre (*sic*), on peut repérer le Soleil par sa **longitude écliptique géocentrique** (λ). Par définition, à l'équinoxe de printemps (20 mars), $\lambda = 0^\circ$.

Dans un calendrier zodiacal, tel qu'utilisé pendant plusieurs siècles en astronomie, l'année est divisée en 12 *signes* de 30° pour accomplir un tour complet (Tableau 1).

D'autre part, la longitude est liée à la déclinaison du Soleil par :

$$\sin(\delta) = \sin(\varepsilon) \times \sin(\lambda) \quad (1)$$

où ε est l'obliquité de l'écliptique ($\varepsilon \simeq 23,4^\circ$).

$\lambda(^{\circ})$	date	★	$\lambda(^{\circ})$	date
0	20 mars	★	180	23 septembre
30	20 avril	★	210	23 octobre
60	21 mai	★	240	22 novembre
90	21 juin	★	270	21 décembre
120	23 juillet	★	270	21 décembre
150	23 août	★	330	19 février

TAB. 1 – Longitude du Soleil durant l'année.

Sur ce quadrant, j'ai tracé un arc-de-cercle (orange) de rayon égal à $R \times \sin(\varepsilon)$, nommé *arc d'obliquité* (Fig. 1). Voici comment cet arc-de-cercle permet de déterminer la déclinaison :

Après avoir tendu le fil du quadrant sur la graduation correspondant à la longitude du Soleil, on fixe le fil à son intersection avec l'arc d'obliquité, puis on laisse pendre le fil depuis ce nouveau point de suspension. Le fil coupe alors le limbe gradué en indiquant la valeur (approximative) de la déclinaison du Soleil. On peut retenir le fil avec un doigt, par exemple. Pour s'assurer de la verticalité, j'ai suspendu au centre O du cadran un second fil lesté servant de fil à plomb en s'alignant sur le bord gauche du cadran.

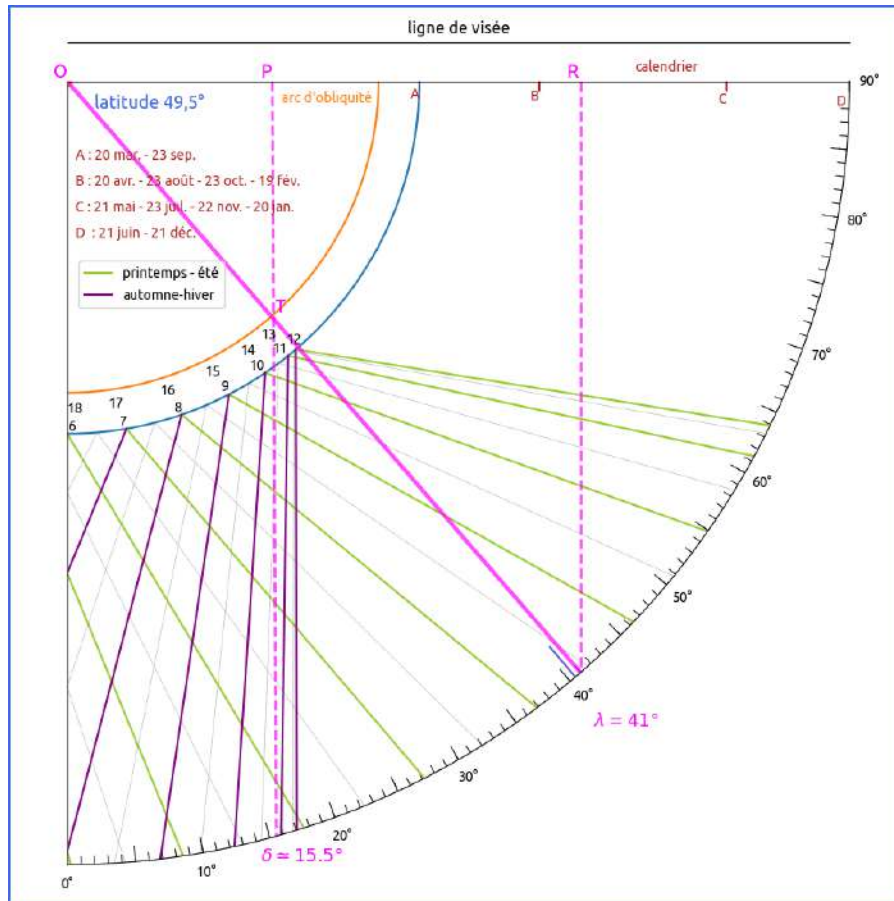


FIG. 1 – Détermination de la déclinaison δ .

Sur la figure 1, le trait épais matérialise le fil tendu sur l'angle de longitude $\lambda = 41^{\circ}$. Le point T est l'intersection du fil avec l'arc d'obliquité, de rayon $R \cdot \sin(\varepsilon)$ (R est le rayon du quadrant).

Le segment $OR = R \cdot \sin(\lambda)$.

Le segment $OP = R \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\lambda)$.

En pendant depuis le point T, le fil coupe le limbe à la graduation $15,5^\circ$.

Or, on a aussi $OP = R \cdot \sin(15,5)$.

Donc $R \cdot \sin(15,5) = R \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\lambda)$

En identifiant avec la relation (1), l'angle $15,5^\circ$ indiqué par le fil est égal à la déclinaison δ du Soleil.

Étape 2 : calage de la perle

À midi, la hauteur méridienne h_m du Soleil est simplement donnée par :

$$h_m = 90^\circ - \varphi + \delta \quad (2)$$

Avec la déclinaison $\delta = 15,5^\circ$ déterminée précédemment : $h_m = 90 - 49,5 + 15,5 = 56^\circ$.

Pour caler la perle, il suffit de tendre le fil sur la graduation 56° , puis d'amener la perle sur la ligne horaire de midi. Le cadran est maintenant réglé pour la journée.

Pour faciliter l'opération, j'ai ajouté un repère à la graduation $90^\circ - \varphi$ (ici, $40,5^\circ$). Il suffit d'y ajouter la déclinaison.

Longitude éclipique pour une date quelconque

Sur le quadrant proposé ici, le calendrier est réduit à sa plus simple expression, avec seulement deux repères pour les dates entre équinoxes et solstices. Qu'en est-il pour les autres dates ?

Les 360° de longitude sont parcourus par le Soleil en environ 365 jours. Pour une durée de quelques jours, l'approximation que 1 jour correspond à 1 degré induit une erreur acceptable, on peut repérer la graduation du limbe qui correspond au jour recherché.

Prenons l'exemple du 1^{er} mai :

Cette date se trouve 11 jours avant le 20 avril, date indiquée sur ce calendrier. Pour le 20 avril, on a $\lambda = 30^\circ$ (Tableau 1). On place donc le fil sur la graduation 41° (c'est justement l'angle que j'ai pris en exemple ci-dessus).

Avec le fil pendant depuis l'arc d'obliquité, on trouve $\delta = 15,5^\circ$, et $h_m = 56^\circ$. Pour l'année 2022, les éphémérides de l'IMCCE pour la latitude $49,5^\circ$ indiquent $55^\circ 40'$ le 1^{er} mai.

En prenant le limbe comme une échelle de longitudes éclipiques, la graduation 0° fait démarrer l'année au 20 mars. À la graduation 90° , on arrive au solstice d'été (Tableau 1). Au-delà, on rebrousse chemin sur le limbe (graduation 60° pour le 23 juillet). En effet, $\sin(90^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$.

On revient donc à la graduation 0° pour l'équinoxe d'automne. Ensuite, on change encore de sens jusqu'à 90° (car $\sin(180^\circ + \theta) = \sin(\theta)$). Par exemple, pour le 22 novembre, $\lambda = 240^\circ$; cette date correspond à la graduation 60° . Les déclinaisons sont lues comme précédemment, mais pour trouver la hauteur méridienne, il faut se souvenir que les déclinaisons sont négatives en automne et en hiver. Pour l'ensemble de l'année, on effectue ainsi 2 allers-retours sur le limbe.

D'autres exemples de lectures sont donnés dans le tableau 2.

Avec cette méthode, une date quelconque ne se trouve jamais à plus de 15 jours d'une date de référence placée sur le calendrier, ce qui limite les erreurs dues aux approximations.

Date	Date de référence	Graduation	Déclinaison lue	Hauteur méri- dienne	Éphéméride IMCCE (2022)
1 ^{er} déc.	22 novembre (9 jours avant)	69°	22 (-22)°	18,5°	18°40′
10 juillet	23 juillet (13 jours avant)	73°	22,5°	63°	62°43′
5 fév.	19 fév. (14 jours avant)	44°	16,5 (-16,5)°	24°	24°40′

TAB. 2 – Exemples de détermination de la hauteur méridienne.