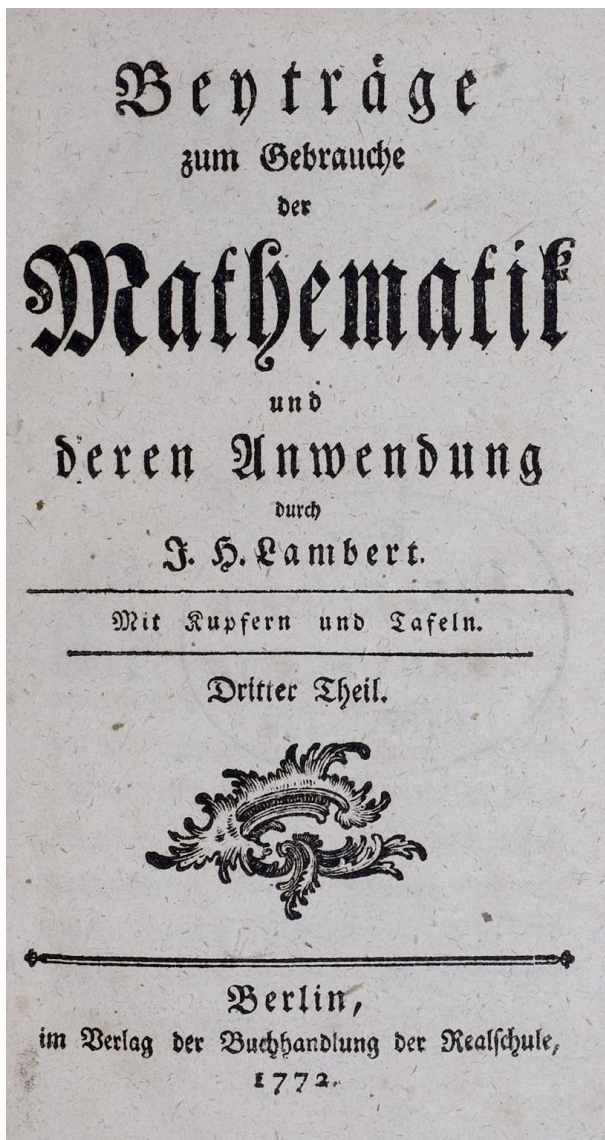




Beyträge  
zum Gebrauche  
der  
Mathematik  
und  
deren Anwendung.  
durch  
J. H. Lambert  
Dritter Theil

Berlin  
1772

Contributions  
à l'usage  
des  
mathématiques  
et  
à leur application  
de  
J. H. Lambert  
Troisième partie

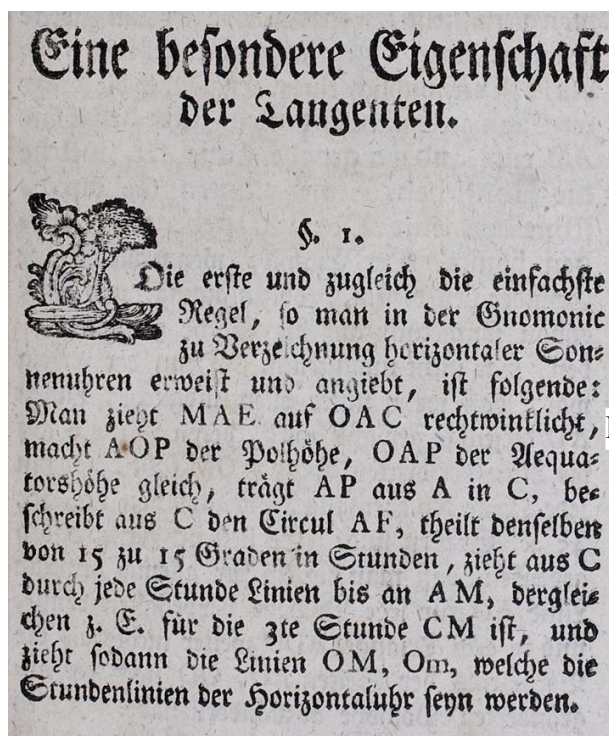
Berlin  
1772

### Avertissement :

Cette traduction a été obtenue à partir des outils numériques en ligne suivants :

- FastOCR - German OCR (<https://fastocr.org/german-ocr>) pour la reconnaissance automatique des caractères Fraktur dont les glyphes sont parfois assez différents de ceux des caractères modernes,
- Deepl (<https://www.deepl.com/fr/translator/de/fr/>) pour la traduction automatique en français.

À chaque étape, les résultats ont été vérifiés et corrigés manuellement mais il reste assurément un certain nombre d'erreurs ou de coquilles et, pour que chacun puisse les retrouver, cette traduction est présentée en juxtaposant les trois versions du texte : la numérisation d'origine, le résultat de la reconnaissance de caractères, et la traduction en français.



### Eine besondere Eigenschaft der Tangenten.

#### §. 1.

Die erste und zugleich die einfachste Regel, so man in der Gnomonic zu Verzeichnung horizontaler Sonnenuhren erweist und angiebt, ist folgende:

Man zieht MAE auf OAC rechtwinklicht, macht AOP der Polhöhe, OAP der Aequatorshöhe gleich, trägt AP aus A in C, beschreibt aus C den Circul AF, theilt denselben von 15 zu 15 Graden in Stunden, zieht aus C durch jede Stunde Linien bis an AM, dergleichen z. E. für die 3te Stunde CM ist, und zieht sodann die Linien OM, Om, welche die Stundenlinien der Horizontaluhr seyn werden.

### Une particularité des cadrans solaires allongés.

#### §. 1.

La première règle, qui est aussi la plus simple, lorsqu'on souhaite tracer des cadrans solaires horizontaux selon la méthode gnomonique, est la suivante :

On trace MAE perpendiculairement à OAC, on fait en sorte qu'AOP corresponde à la hauteur polaire et OAP à la hauteur équatoriale, on reporte AP depuis A jusqu'à C, on trace à partir de C le cercle AF, on divise celui-ci en heures de 15 degrés chacune, on trace depuis C, à travers chaque heure, des lignes jusqu'à AM, comme par exemple CM pour la 3e heure, puis on trace les lignes OM, Om, qui constitueront les lignes horaires de l'horloge horizontale.

§. 2.

Ben diesem Verfahren muß nun gewöhnlich die Linie AM sehr verlängert werden, zumal wenn man auch die halbe und Viertelstunden in der Sonnenuhr zeichnen will. Man hat daher auf Mittel gesonnen, dieser Unbequemlichkeit abzuheffen, dergleichen auch in dem zweyten Theile meiner Beyträge zur Mathematik vorkommen, wo ich angebe, wie man vermittelst zweyer Circulbögen zum Zwecke gelangen kann. Ich habe aber seitdem gesehen, daß vermuthlich einem Engländer die Frage im Sinn gekommen, ob nicht statt der Linie AM eine andere gerade Linie AD, welche die sämtlichen Stundenlinien Om durchschneider, mit Vortheil gebraucht werden könne? Der Einfall, wenn anders der Erfinder bey diesem Problem anfang, und nicht etwan synthetisch auf die Sache geführt worden, war nicht unglücklich. Denn der Erfolg war, daß wenn unter allen möglichen Linien AD diejenige gewählt wird, deren Mitte N auf die Linie der dritten Stunde OM fällt, alsdann jede Theile Nn ebenfalls Tangenten von 15, 30, 45 u. Graden sind. Es ließ sich ferner dabey gedenken, daß man die ein für allemal getheilte Linie AD für jede Polhöhe beybehalten könne, und in dem Triangel ADO weiter nichts als die Verhältnis der Seiten AO, OD nach der abgeänderten Polhöhe abzuändern habe. Ja es kam, weil der Triangel rechtwinklicht, und AD

§. 2.

Ben diesem Verfahren muß nun gewöhnlich die Linie AM sehr verlängert werden, zumal wenn man auch die halbe und Viertelstunden in der Sonnenuhr zeichnen will. Man hat daher auf Mittel gesonnen, dieser Unbequemlichkeit abzuheffen, dergleichen auch in dem zweyten Theile meiner Beyträge zur Mathematik vorkommen, wo ich angebe, wie man vermittelst zweyer Circulbögen zum Zwecke gelangen kann. Ich habe aber seitdem gesehen, daß vermuthlich einem Engländer die Frage im Sinn gekommen, ob nicht statt der Linie AM eine andere gerade Linie AD, welche die sämtlichen Stundenlinien Om durchschneider, mit Vortheil gebraucht werden könne? Der Einfall, wenn anders der Erfinder bey diesem Problem anfang, und nicht etwan synthetisch auf die Sache geführt worden, war nicht unglücklich. Denn der Erfolg war, daß wenn unter allen möglichen Linien AD diejenige gewählt wird, deren Mitte N auf die Linie der dritten Stunde OM fällt, alsdann jede Theile Nn ebenfalls Tangenten von 15, 30, 45 &c. Graden sind. Es ließ sich ferner dabey gedenken, daß man die ein für allemal getheilte Linie AD für jede Polhöhe beybehalten könne, und in dem Triangel ADO weiter nichts als die Verhältnis der Seiten AO, OD nach der abgeänderten Polhöhe abzuändern habe. Ja es kam, weil der Triangel rechtwinklicht, und AD

§. 2.

Dans cette méthode, il faut généralement allonger considérablement la ligne AM, surtout si l'on souhaite également tracer les demi-heures et les quarts d'heure sur le cadran solaire. On a donc cherché des moyens de remédier à cet inconvénient, comme ceux que l'on trouve également dans la deuxième partie de mes « Contributions aux mathématiques », où j'explique comment atteindre cet objectif à l'aide de deux arcs de cercle. Mais j'ai depuis constaté qu'un Anglais avait probablement eu l'idée de se demander s'il ne serait pas préférable d'utiliser, à la place de la ligne AM, une autre ligne droite AD, qui coupe toutes les lignes horaires Om ? Cette idée, si tant est que son inventeur ait abordé ce problème par cette voie et n'ait pas été conduit à cette solution de manière synthétique, n'était pas malvenue. En effet, il en résultait que si, parmi toutes les droites AD possibles, on choisissait celle dont le milieu N tombe sur la ligne de la troisième heure OM, alors chaque segment Nn formait également des tangentes de 15, 30, 45, etc. degrés. On pouvait en outre envisager de conserver une fois pour toutes les divisions de la ligne AD pour chaque hauteur polaire, et de ne modifier dans le triangle ADO que les rapports des côtés AO et OD en fonction de la hauteur polaire modifiée. Oui, cela s'explique par le fait que le triangle est rectangle

von beständiger Größe ist, schlechthin nur auf die Seite OD oder auch AD an. Auf diese Art werden nun in England Scalen verfertigt, worauf die Eintheilung von AD und OD gezeichnet sind. Erstere heißt die Sechsstundenlinie, die andere aber die Breitenlinie. Solche Scalen kamen dem ehemaligen Prof. Kraft zu Petersburg vor, und veranlaßten ihn, in dem 13ten Band der Petersburgschen Commentarien eine Beschreibung davon zu geben, und die Verfertigungsart aufzuklären.

§. 3.

Kraft stellte sich die Sache als ein Problem vor, und löste es analytisch auf, weil er nach langem Nachforschen keinen bereits bekannten Beweis finden konnte. Die Eigenschaft der Linie DE konnte bey dem ersten Erfinder eine Folge synthetischer Betrachtungen seyn, und solche Folgen bieten sich mehrentheils an, ohne daß man sie sucht. Es ist auch möglich, daß der erste Erfinder die Eintheilung der Linie AD Anfangs nur für eine bestimmte Polhöhe berechnet, und nach und nach etwas allgemeines gefunden. Dem sey nun wie ihm wolle, so ist das Problem eigentlich analytisch, und läßt sich kürzer, als Kraft es gethan, folgendermassen auflösen.

§. 4.

Einmal hat man  
An: nD = Am: OD

Fig. 2

von beständiger Größe ist, schlechthin nur auf die Seite OD oder auch AD an. Auf diese Art werden nun in England Scalen verfertigt, worauf die Eintheilung von AD und OD gezeichnet sind. Erstere heißt die Sechsstundenlinie, die andere aber die Breitenlinie. Solche Scalen kamen dem ehemaligen Prof. Kraft zu Petersburg vor, und veranlaßten ihn, in dem 13ten Band der Petersburgschen Commentarien eine Beschreibung davon zu geben, und die Verfertigungsart aufzuklären.

§. 3.

Kraft stellte sich die Sache als ein Problem vor, und löste es analytisch auf, weil er nach langem Nachforschen keinen bereits bekannten Beweis finden konnte. Die Eigenschaft der Linie AD konnte bey dem ersten Erfinder eine Folge synthetischer Betrachtungen feyn, und solche Folgen bieten sich mehrentheils an, ohne daß man sie sucht. Es ist auch möglich, daß der erste Erfinder die Eintheilung der Linie AD Anfangs nur für eine bestimmte Polhöhe berechnet, und nach und nach etwas allgemeines gefunden. Dem sey nun wie ihm wolle, so ist das Problem eigentlich analytisch, und läßt sich kürzer, als Kraft es gethan, folgendermassen auflösen.

§. 4.

Einmal hat man

$$\text{An} : nD = \text{Am} : OD$$

et que AD est de longueur constante ; il suffit donc de se référer uniquement au côté OD ou à AD. C'est ainsi que l'on fabrique désormais en Angleterre des échelles sur lesquelles sont tracées les divisions de AD et OD. La première est appelée « ligne des six heures », tandis que la seconde est appelée « ligne de latitude ». L'ancien professeur Krafft<sup>[1]</sup> a découvert de telles échelles à Saint-Petersbourg, ce qui l'a incité à en donner une description dans le 13e volume des Commentaires de Saint-Petersbourg et à expliquer leur mode de fabrication.

§. 3.

Krafft a abordé la question comme un problème et l'a résolu de manière analytique, car après de longues recherches, il n'a pu trouver aucune démonstration déjà connue. La propriété de la ligne AD a pu résulter, chez le premier inventeur, d'une suite de considérations synthétiques, et de telles suites s'imposent le plus souvent sans qu'on les cherche. Il est également possible que le premier inventeur ait d'abord calculé la division de la ligne AD uniquement pour une hauteur polaire déterminée, puis ait peu à peu découvert un principe plus général. Quoi qu'il en soit, le problème est en réalité analytique et peut être résolu de manière plus concise que ne l'a fait Krafft, comme suit.

§. 4.

On a d'abord

$$\text{An} : nD = \text{Am} : OD$$

demnach

$$A_n : (nD + A_n) = A_m : (OD + A_m)$$

oder

$$A_n : AD = A_m : (OD + A_m)$$

welches

$$A_n = \frac{AD \cdot A_m}{OD + A_m}$$

gibt. Nach dieser Formel könnten nun jede Punkte  $n$  berechnet werden, wie auch immer  $OD$  angenommen wird.

§. 5. Man will aber, daß

$$A_n = \frac{1}{2} AD$$

werde, wenn  $mA = AC = AP$  wird. Dieses gibt demnach

$$\frac{1}{2} AD = \frac{AD \cdot AP}{OD + AP}$$

woraus  $OD = AP = AC$  folgt.

§. 6.

Da nun, wegen  $OD = AC$ ,

$$A_n = \frac{AD \cdot A_m}{AC + A_m}$$

ist, so setze man den Winkel  $mCA = \omega$ , und man wird

$$A_n = AD \cdot \frac{\tan \omega}{1 + \tan \omega}$$

demnach

$$N_n = \frac{1}{2} AD - A_n = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1 - \tan \omega}{1 + \tan \omega}$$

demnach

$$A_n : (nD + A_n) = A_m : (OD + A_m)$$

oder

$$A_n : AD = A_m : (OD + A_m)$$

welches

$$A_n = \frac{AD \cdot A_m}{OD + A_m}$$

gibt. Nach dieser Formel könnten nun jezt Punkte  $n$  berechnet werden, wie auch immer  $OD$  angenommen wird.

§. 5. Man will aber, daß

$$A_n = \frac{1}{2} AD$$

werde, wenn  $mA = AC = AP$  wird. Dieses gibt demnach

$$\frac{1}{2} AD = \frac{AD \cdot AP}{OD + AP}$$

woraus  $OD = AP = AC$  folgt.

§. 6.

Da nun, wegen  $OD = AC$ ,

$$A_n = \frac{AD \cdot A_m}{AC + A_m}$$

ist, so setze man den Winkel  $mCA = \omega$ , und man wird

$$A_n = AD \cdot \frac{\tan \omega}{1 + \tan \omega}$$

demnach

$$N_n = \frac{1}{2} AD - A_n = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1 - \tan \omega}{1 + \tan \omega}$$

d'où

$$A_n : (nD + A_n) = A_m : (OD + A_m)$$

ou

$$A_n : AD = A_m : (OD + A_m)$$

ce qui donne

$$A_n = \frac{AD \cdot A_m}{OD + A_m}$$

Grâce à cette formule, on pourrait désormais calculer  $n$  points quelconques, quelle que soit la valeur choisie pour  $OD$ .

§. 5. Or, on veut que

$$A_n = \frac{1}{2} AD$$

lorsque  $mA = AC = AP$ . On obtient donc

$$\frac{1}{2} AD = \frac{AD \cdot AP}{OD + AP}$$

d'où il résulte que  $OD = AP = AC$ .

§. 6.

Puisque, en raison de  $OD = AC$ ,

$$A_n = \frac{AD \cdot A_m}{AC + A_m}$$

on pose l'angle  $mCA = \omega$ , et on obtient

$$A_n = AD \cdot \frac{\tan \omega}{1 + \tan \omega}$$

d'où

$$N_n = \frac{1}{2} AD - A_n = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1 - \tan \omega}{1 + \tan \omega}$$

oder

$Nn = AN \cdot \tan(45^\circ - \omega)$   
erhalten. Und so ist die Eintheilung der Scala AD bestimmt, und, wie man sieht, von der Polhöhe ganz unabhängig.

§. 7.

Es sey nun

$$AD = 1$$

$$OD = x$$

die Polhöhe  $AOP = p$

so ist  $OA = \sqrt{1 - xx}$

$$AP = OA \cdot \sin p = \sqrt{1 - xx} \cdot \sin p = OD$$

$$\text{demnach } \sqrt{1 - xx} \cdot \sin p = x$$

$$x = \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

$$\text{oder } OD = \frac{AD \cdot \sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

§. 8.

Die ganze Construction ist nun folgende: Auf AD beschreibe man den Circul AGDOL, und theile die Helfte DOLA in 90 Theile, welche die 90 Grade vorstellen. Von D gegen L zähle man die Grade der Polhöhe, und indem man DQ auf DA senkrecht zieht, so macht man DQ der Chorde DL, welche den Sinus der Polhöhe vorstellt, gleich. Man ziehe AQ, und sodann DO, so ist der Triangel ADO für die zum Grunde gelegte Polhöhe construirt.

oder

$Nn = AN \cdot \tan(45^\circ - \omega)$   
erhalten. Und so ist die Eintheilung der Scala AD bestimmt, und, wie man sieht, von der Polhöhe ganz unabhängig.

§. 7.

Es sey nun

$$AD = 1$$

$$OD = x$$

die Polhöhe  $AOP = p$

so ist  $OA = \sqrt{1 - x^2}$

$$AP = OA \cdot \sin p = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin p = OD$$

$$\text{demnach } \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin p = x$$

$$x = \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

$$\text{oder } OD = \frac{AD \cdot \sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

oder

§. 8.

Die ganze Construction ist nun folgende: Auf AD beschreibe man den Circul AGDOL, und theile die Helfte DOLA in 90 Theile, welche die 90 Grade vorstellen. Von D gegen L zähle man die Grade der Polhöhe, und indem man DQ auf DA senkrecht zieht, so macht man DQ der Chorde DL, welche den Sinus der Polhöhe vorstellt, gleich. Man ziehe AQ, und sodann DO, so ist der Triangel ADO für die zum Grunde gelegte Polhöhe construirt.

ou

$Nn = AN \cdot \tan(45^\circ - \omega)$   
Ainsi, la division de l'échelle AD est déterminée et, comme on le voit, totalement indépendante de la hauteur polaire.

§. 7.

Soit maintenant

$$AD = 1$$

$$OD = x$$

la hauteur polaire  $AOP = p$

alors  $OA = \sqrt{1 - x^2}$

$$AP = OA \cdot \sin p = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin p = OD$$

$$\text{d'où } \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin p = x$$

$$x = \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

$$\text{ou } OD = \frac{AD \cdot \sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

ou

§ 8.

La construction complète est la suivante : sur AD, on trace le cercle AGDOL, puis on divise le demi-cercle DOLA en 90 parties, qui représentent les 90 degrés. De D vers L, on compte les degrés de la hauteur polaire ; en traçant DQ perpendiculairement à DA, on rend DQ égal à la corde DL, qui représente le sinus de la hauteur polaire. On trace AQ, puis DO ; le triangle ADO est alors construit pour la hauteur polaire prise

Fig. 3

Man macht ferner  $AG = GD$ , und indem man DOLA in 6 Stunden theilt, so zieht man aus G in jede Stunde gerade Linien, welche sodann die Scala AD von selbst eintheilen. Man kann auf erst beschriebene Art die Punkte O für jede Polhöhen auf den beyden Quadranten DO, DG zeichnen, so wie sie in der Figur auf dem leßtern gezeichnet sind. Und so wird der Circul nebst seinem Diameter eine allgemeine Horizontal und Verticaluhr seyn. Die Mittagslinie ist Vormittags AO, Nachmittags Ao.

§. 9.

Indem ich auf diese Art die Sache überdachte, und den Beweis und die Construction einfacher zu machen suchte, kam mir erst im Sinn, daß ich die Hauptsache, welche hiebey auf die Eigenschaft der Linie AD ankömmt, längst schon und viel allgemeiner gefunden hatte, und zwar bey Anlaß einiger über perspectivische Zeichnungen angestellten Untersuchungen. Man ziehe an den Circul C die Tangente AM, und

Fig. 4

Man macht ferner  $AG = GD$ , und indem man DOLA in 6 Stunden theilt, so zieht man aus G in jede Stunde gerade Linien, welche sodann die Scala AD von selbst eintheilen. Man kann auf erst beschriebene Art die Punkte O für jede Polhöhen auf den beyden Quadranten DO, DG zeichnen, so wie sie in der Figur auf dem leßtern gezeichnet sind. Und so wird der Circul nebst seinem Diameter eine allgemeine Horizontal und Verticaluhr seyn. Die Mittagslinie ist Vormittags AO, Nachmittags Ao.

§. 9.

Indem ich auf diese Art die Sache überdachte, und den Beweis und die Construction einfacher zu machen suchte, kam mir erst im Sinn, daß ich die Hauptsache, welche hiebey auf die Eigenschaft der Linie AD ankömmt, längst schon und viel allgemeiner gefunden hatte, und zwar bey Anlaß einiger über perspectivische Zeichnungen angestellten Untersuchungen. Man ziehe an den Circul C die Tangente AM, und indem man den Circul in beliebige Theile theilt, so zieht man jede Linien CM. Sodann wählt man nach Belieben einen Punct D, und zieht jede Linien DM. Endlich zieht man nach Belieben eine Linie EQ, welche die aus D gezogenen, und allenfalls verlängerten Linien durchschneide, z. E. DA in a, DM in N, &c. Nun sage ich, daß sich immer ein Punct F finden lasse, welcher die Winkel aFN den Winkeln ACM durchaus gleich

comme base. On fait ensuite  $AG = GD$ , et en divisant DOLA en 6 heures, on trace à partir de G des lignes droites vers chaque heure, qui divisent alors d'elles-mêmes l'échelle AD. On peut, selon la méthode décrite ci-dessus, tracer les points O correspondant à chaque hauteur polaire sur les deux quadrants DO et DG, tels qu'ils sont représentés sur la figure dans ce dernier. Ainsi, le cercle et son diamètre formeront une horloge horizontale et verticale générale. La ligne de midi est AO le matin et Ao l'après-midi.

§ 9.

C'est en réfléchissant ainsi à la question et en cherchant à simplifier la démonstration et la construction qu'il m'est venu à l'esprit que j'avais déjà découvert depuis longtemps, et de manière bien plus générale, l'élément essentiel qui, ici, repose sur la propriété de la droite AD, et ce à l'occasion de certaines recherches menées sur les dessins en perspective. On trace sur le cercle de centre C la tangente AM, et en divisant le cercle en parties quelconques, on trace chaque ligne CM. On choisit ensuite à volonté un point D, et on trace chaque ligne DM. Enfin, on trace à volonté une ligne EQ qui coupe les lignes tirées à partir de D, et éventuellement prolongées, par exemple DA en a, DM en N, etc. Or, je dis qu'il est toujours possible de trouver un point F qui rende les angles aFN parfaitement égaux aux angles ACM, de sorte que, si l'on doit tracer

mache, so daß wenn nur die aus D gezogenen Linien gezogen werden sollen, es gleich viel ist, ob man die Linie AM und den Punct C, oder die Linie EQ und den Punct F dabey gebrauche.

§. 10.

Um dieses zu beweisen und zugleich die Lage des Puncts F zu bestimmen, so sey C der gegebene Mittelpunct, IAB die gegebene Tangente, CA auf IAB senkrecht, EB sey die willkürlich gezogene Linie, und D der willkürlich angenommene Punct. Der gesuchte Punct sey F, und FG auf EB senkrecht. Auf IAB nehme man einen jeden beliebigen Punct M, man ziehe CM, DM, FM. Man ziehe endlich DE und HC mit AI parallel, so muß der Bedingung der Aufgabe gemäß allemal

$$CFN = HCM$$

seyn. Denn rückt der Punct M gegen I unendlich weit hinaus, so wird CM und DM mit AI parallel, demnach fällt CM auf CH, und DM auf DE. Da nun der Punct F gleiche Winkel wie C machen soll, so müssen jede Winkel

$$CFN = HCM$$

seyn.

§. 11.

Um nun zu sehen, ob und wie dieses statt haben kann, so sey

mache, so daß wenn nur die aus D gezogenen Linien gezogen werden sollen, es gleich viel ist, ob man die Linie AM und den Punct C, oder die Linie EQ und den Punct F dabey gebrauche.

§. 10.

Fig. 5

Um dieses zu beweisen und zugleich die Lage des Puncts F zu bestimmen, so sey C der gegebene Mittelpunct, IAB die gegebene Tangente, CA auf IAB senkrecht, EB sey die willkürlich gezogene Linie, und D der willkürlich angenommene Punct. Der gesuchte Punct sey F, und FG auf EB senkrecht. Auf IAB nehme man einen jeden beliebigen Punct M, man ziehe CM, DM, FN. Man ziehe endlich DE und HC mit AI parallel, so muß der Bedingung der Aufgabe gemäß allemal

$$EFN = HCM$$

seyn. Denn rückt der Punct M gegen I unendlich weit hinaus, so wird CM und DM mit AI parallel, demnach fällt CM auf CH, und DM auf DE. Da nun der Punct F gleiche Winkel wie C machen soll, so müssen jede Winkel

$$EFN = HCM$$

seyn.

§. 11.

Um nun zu sehen, ob und wie dieses statt haben kann, so sey

uniquement les droites partant de D, cela revient au même d'utiliser la droite AM et le point C, ou la droite EQ et le point F.

§ 10.

Pour démontrer cela et déterminer en même temps la position du point F, soit C le point milieu donné, IAB la tangente donnée, CA perpendiculaire à IAB, EB une droite tracée arbitrairement et D un point choisi arbitrairement. Soit F le point recherché et FG perpendiculaire à EB. Sur IAB, prenons un point M quelconque, puis traçons CM, DM et FN. Traçons enfin DE et HC parallèles à AI ; alors, conformément à la condition de l'énoncé, on doit toujours avoir

$$EFN = HCM$$

En effet, si l'on éloigne le point M vers I à l'infini, CM et DM deviennent parallèles à AI ; par conséquent, CM coïncide avec CH, et DM avec DE. Or, puisque le point F doit former des angles égaux à ceux de C, chaque angle doit satisfaire

$$EFN = HCM$$

§ 11.

Pour voir maintenant si et comment cela peut se produire, posons

$$\begin{array}{ll}
AC = 1 & ACM = \omega \\
AB = a & GF = y \quad GFM = \varphi \\
ED = b & GFE = \xi \\
EB = c
\end{array}$$

Und es soll  $\xi + \varphi = 90^\circ + \omega$  seyn. Nun ist

$$BM = a - \tan \omega$$

$$EN = y \tan \xi + y \tan \varphi$$

Und  $(MB + ED) : EB = ED : EN$

demnach

$$(b + a - \tan \omega) : c = b : (y \tan \xi + y \tan \varphi)$$

$$cb = y \cdot (y \tan \xi + y \tan \varphi) \cdot (b + a - \tan \omega)$$

Da nun  $\cotang \omega = -\frac{t\xi + t\varphi}{1 - t\xi \cdot t\varphi}$

so haben wir

$$cb = y(t\xi + t\varphi) \cdot (b + a + \frac{1 - t\xi \cdot t\varphi}{t\xi + t\varphi})$$

oder

$$cb = y((b + a) \cdot (t\xi + t\varphi) + 1 - t\xi \cdot t\varphi)$$

welches

$$0 = y(b + a)t\xi + y(b + a)t\varphi + y - y t\xi \cdot t\varphi - cb$$

Da nun in dieser Gleichung  $t\varphi$  allein veränderlich seyn soll, so müssen beyde Glieder

$$y(b + a)t\xi + y - cb = 0$$

$$y \cdot t\varphi(b + a - t\xi) = 0$$

seyn. Demnach ist

$$t\xi = (b + a)$$

$$\begin{array}{lll}
AC = 1 & ACM = \omega & \\
AB = a & GF = y & GFN = \varphi \\
ED = b & & GFE = \xi \\
EB = c & & 
\end{array}$$

Und es soll  $\xi + \varphi = 90^\circ + \omega$  seyn. Nun ist

$$BM = a - \tan \omega$$

$$EN = y \cdot \tan \xi + y \cdot \tan \varphi$$

Und  $(MB + ED) : EB = ED : EN$

demnach

$$(b + a - \tan \omega) : c = b : y \cdot (\tan \xi + \tan \varphi)$$

$$c \cdot b = y \cdot (\tan \xi + \tan \varphi) \cdot (b + a - \tan \omega)$$

Da nun  $\cot \omega = -\frac{\tan \xi + \tan \varphi}{1 - \tan \xi \cdot \tan \varphi}$

so haben wir

$$c \cdot b = y \cdot (\tan \xi + \tan \varphi) \cdot (b + a + \frac{1 - \tan \xi \cdot \tan \varphi}{\tan \xi + \tan \varphi})$$

oder

$$c \cdot b = y \cdot ((b + a) \cdot (\tan \xi + \tan \varphi) + 1 - \tan \xi \cdot \tan \varphi)$$

welches

$$0 = y \cdot (b + a) \cdot \tan \xi + y \cdot (b + a) \cdot \tan \varphi + y - y \cdot \tan \xi \cdot \tan \varphi - c \cdot b$$

Da nun in dieser Gleichung  $\tan \varphi$  allein veränderlich seyn soll, so müssen beyde Glieder

$$y \cdot (b + a) \cdot \tan \xi + y - c \cdot b = 0$$

$$y \cdot \tan \varphi \cdot (b + a - \tan \xi) = 0$$

seyn. Demnach ist

$$\tan \xi = (b + a)$$

$$\begin{array}{lll}
AC = 1 & ACM = \omega & \\
AB = a & GF = y & GFN = \varphi \\
ED = b & & GFE = \xi \\
EB = c & & 
\end{array}$$

Et il faut que  $\xi + \varphi = 90^\circ + \omega$ . Or, on a

$$BM = a - \tan \omega$$

$$EN = y \cdot \tan \xi + y \cdot \tan \varphi$$

Et  $(MB + ED) : EB = ED : EN$

donc

$$(b + a - \tan \omega) : c = b : y \cdot (\tan \xi + \tan \varphi)$$

$$c \cdot b = y \cdot (\tan \xi + \tan \varphi) \cdot (b + a - \tan \omega)$$

Or, puisque  $\cot \omega = -\frac{\tan \xi + \tan \varphi}{1 - \tan \xi \cdot \tan \varphi}$

on a donc

$$c \cdot b = y \cdot (\tan \xi + \tan \varphi) \cdot (b + a + \frac{1 - \tan \xi \cdot \tan \varphi}{\tan \xi + \tan \varphi})$$

ou

$$c \cdot b = y \cdot ((b + a) \cdot (\tan \xi + \tan \varphi) + 1 - \tan \xi \cdot \tan \varphi)$$

ce qui donne

$$0 = y \cdot (b + a) \cdot \tan \xi + y \cdot (b + a) \cdot \tan \varphi + y - y \cdot \tan \xi \cdot \tan \varphi - c \cdot b$$

Comme, dans cette équation, seul  $\tan \varphi$  doit varier, les deux termes

$$y \cdot (b + a) \cdot \tan \xi + y - c \cdot b = 0$$

$$y \cdot \tan \varphi \cdot (b + a - \tan \xi) = 0$$

On en déduit donc que

$$\tan \xi = (b + a)$$

$$\text{Und} \quad y(b+a)^2 + y - cb = 0$$

$$y = \frac{cb}{(b+a)^2 + 1} = \frac{cb \cdot AC}{(b+a)^2 + AC^2}$$

$$EG = y \tan \xi = \frac{cb(a+b)}{(a+b)^2 + 1} = \frac{cb(a+b)}{(a+b)^2 + AC^2}$$

§. 12.

Man sieht hieraus, daß der Winkel  $BED = IBE$  in der Rechnung gar nicht vorkommt, sondern die Linien

$DE, EG, EB, BA, AC, GF$  einander dergestalt bestimmen, daß man zwei derselben mittelst der vier übrigen finden kann. Dieses ist nun eben was das Problem sehr allgemein, und die dadurch gefundene Eigenschaft der Tangenten sehr merkwürdig macht. Wir können nun noch sehen, wie der Punct  $F$  sich durch Construction finden lasse.

§. 13.

Nachdem die Linien  $HC, CA, IAB, BE, ED$  wie vorhin gezogen worden, so mache man  $AM = AC$ , um den Winkel  $MAC = 45^\circ$  zu haben. Sodann ziehe man  $DM, DA$ , und bemerke die Durchschnittspuncte  $N, a$ . Auf  $Ea$  beschreibe man den Circul  $ELa$ , man nehme  $EL = La = 90^\circ$ , und aus  $C$  ziehe man eine gerade Linie in  $N$ , so wird diese den Circul in dem verlangten Punct  $F$  durchschneiden. Denn es ist

Fig. 6

$$\text{Und} \quad y \cdot (b+a)^2 + y - c \cdot b = 0$$

$$y = \frac{c \cdot b}{(b+a)^2 + 1} = \frac{c \cdot b \cdot AC}{(b+a)^2 + AC^2}$$

$$EG = y \cdot \tan \xi = \frac{c \cdot b \cdot (a+b)}{(a+b)^2 + 1} = \frac{c \cdot b \cdot (a+b)}{(a+b)^2 + AC^2}$$

§. 12.

Man sieht hieraus, daß der Winkel  $BED = IBE$  in der Rechnung gar nicht vorkommt, sondern die Linien

$DE, EG, EB, BA, AC, GF$  einander dergestalt bestimmen, daß man zwei derselben mittelst der vier übrigen finden kann. Dieses ist nun eben was das Problem sehr allgemein, und die dadurch gefundene Eigenschaft der Tangenten sehr merkwürdig macht. Wir können nun noch sehen, wie der Punct  $F$  sich durch Construction finden lasse.

§. 13.

Nachdem die Linien  $HC, CA, IAB, BE, ED$  wie vorhin gezogen worden, so mache man  $AM = AC$ , um den Winkel  $MAC = 45^\circ$  zu haben. Sodann ziehe man  $DM, DA$ , und bemerke die Durchschnittspuncte  $N, a$ . Auf  $Ea$  beschreibe man den Circul  $ELa$ , man nehme  $EL = La = 90^\circ$ , und aus  $L$  ziehe man eine gerade Linie in  $N$ , so wird diese den Circul in dem verlangten Punct  $F$  durchschneiden. Denn es ist

$$\text{Et} \quad y \cdot (b+a)^2 + y - c \cdot b = 0$$

$$y = \frac{c \cdot b}{(b+a)^2 + 1} = \frac{c \cdot b \cdot AC}{(b+a)^2 + AC^2}$$

$$EG = y \cdot \tan \xi = \frac{c \cdot b \cdot (a+b)}{(a+b)^2 + 1} = \frac{c \cdot b \cdot (a+b)}{(a+b)^2 + AC^2}$$

§. 12.

On voit ici que l'angle  $BED = IBE$  n'apparaît pas du tout dans le calcul, mais que les segments

$DE, EG, EB, BA, AC, GF$  se déterminent mutuellement de telle sorte que l'on peut trouver deux d'entre elles à l'aide des quatre autres. C'est précisément ce qui rend le problème très général et la propriété des tangentes ainsi trouvée très remarquable. Nous pouvons maintenant voir comment le point  $F$  peut être trouvé par construction.

§. 13.

Une fois les droites  $HC, CA, IAB, BE, ED$  tracées comme précédemment, on fait  $AM = AC$  afin d'obtenir l'angle  $MAC = 45^\circ$ . Tracez ensuite  $DM, DA$ , et notez les points d'intersection  $N, a$ . Sur  $Ea$ , tracez le cercle  $ELa$ , prenez  $EL = La = 90^\circ$ , et tracez depuis  $L$  une droite vers  $N$ ; celle-ci coupera le cercle au point  $F$  recherché. En effet, on a

$EFa = 90^\circ = HCA$   
 $NFa = 45^\circ = MCA$   
 und damit ist auch überhaupt  
 $EFN = HCM$   
 wo auch immer der Punct M auf IB genommen  
 wird.

§. 14.

In Aufsehung der hier gegebenen Auflösung  
 des Problems werde ich noch anmerken,  
 daß sie so beschaffen ist, daß man gleichsam  
 zufälliger Weise die Allgemeinheit derselben hätte  
 finden können. Um dieses zu zeigen, so setze  
 man den ganz besondern Fall, wo die Lage der  
 Puncte C, A, B, G, F, E, D gegeben ist,  
 und wo man schlechthin nur den Punct M hätte  
 finden wollen, bey welchem  $HCM = EFN$   
 wird. Hätte man in dieser Berechnung, wie  
 vorhin, die gegebenen Stücke

1, a, c,  $\xi$ , y, b

und das gesuchte  $\phi$  genommen, so würde man  
 auf eben die Art

$$\tan \phi = \frac{y(b+a) \cdot \tan \xi + y - c \cdot b}{y(b+a) - y \cdot \tan \xi}$$

gefunden haben. Diese Auflösung hat nun das  
 Ansehen, als wenn nur ein einiger Winkel  $\phi$   
 der Bedingung der Aufgabe Genüge leistete,  
 weil 1, y, b, a,  $\xi$ , c bestimmt sind. Auch  
 würde dieses nothwendig seyn, wenn sich diese  
 Werthe nicht dergestalt bestimmen ließen, daß

$$EFa = 90^\circ = HCA$$

$$NFa = 45^\circ = MCA$$

und damit ist auch überhaupt

$$EFN = HCM$$

wo auch immer der Punct M auf IB genommen  
 wird.

§. 14.

In Ansehung der hier gegebenen Auflösung des  
 Problems werde ich noch anmerken, daß sie so  
 beschaffen ist, daß man gleichsam zufälliger  
 Weise die Allgemeinheit derselben hätte finden  
 können. Um dieses zu zeigen, so sehe man den  
 ganz besondern Fall, wo die Lage der Puncte C,  
 A, B, G, F, E, D gegeben ist, und wo man  
 schlechthin nur den Punct M hätte finden wollen,  
 bey welchem  $HCM = EFN$  wird. Hätte man in  
 dieser Berechnung, wie vorhin, die gegebenen  
 Stücke

1, a, c,  $\xi$ , y, b

und das gesuchte  $\phi$  genommen, so würde man  
 auf eben die Art

$$\tan \phi = \frac{y \cdot (b+a) \cdot \tan \xi + y - c \cdot b}{y \cdot (b+a) - y \cdot \tan \xi}$$

gefunden haben. Diese Auflösung hat nun das  
 Ansehen, als wenn nur ein einiger Winkel  $\phi$  der  
 Bedingung der Aufgabe Genüge leistete, weil 1,  
 y, b, a,  $\xi$ , c bestimmt sind. Auch würde dieses  
 nothwendig seyn, wenn sich diese Werthe nicht  
 dergestalt bestimmen ließen, daß

$$EFa = 90^\circ = HCA$$

$$NFa = 45^\circ = MCA$$

et donc, de manière générale,

$$EFN = HCM$$

quel que soit le point M choisi sur IB.

§ 14.

Au regard de la résolution du problème donnée  
 ici, je tiens à ajouter qu'elle est de nature telle  
 qu'on aurait pu, pour ainsi dire par hasard, en  
 découvrir le caractère général. Pour le démontrer,  
 considérons le cas tout à fait particulier où la  
 position des points C, A, B, G, F, E, D est  
 donnée, et où l'on aurait simplement voulu  
 trouver le point M pour lequel  $HCM = EFN$ . Si,  
 dans ce calcul, comme précédemment, on avait  
 pris les grandeurs données

1, a, c,  $\xi$ , y, b

et la valeur recherchée de  $\phi$ , on aurait obtenu,  
 exactement de la même manière,

$$\tan \phi = \frac{y \cdot (b+a) \cdot \tan \xi + y - c \cdot b}{y \cdot (b+a) - y \cdot \tan \xi}$$

Cette résolution donne l'impression que seul un  
 angle  $\phi$  satisfait à la condition du problème,  
 puisque 1, y, b, a,  $\xi$ , c sont déterminés. Cela serait  
 d'ailleurs nécessaire si ces valeurs ne pouvaient  
 pas être déterminées de telle sorte que le

Zähler und Nenner zugleich  $\infty 0$  würden. Da aber dieses angeht, so sieht man, daß es Fälle giebt, wo man für  $\varphi$  jeden beliebigen Winkel nehmen kann.

§. 15.

Es sey nun z. E. DAR die Verticallinie einer Wanduhr, welche um den Winkel  $\angle RPQ$  vom Mittage westwärts abweicht, AL die Aequinoctiallinie, DC die Substylarlinie. Da nun besonders für die 8te und 9te Stundenlinie, die Aequinoctiallinie sehr verlängert werden müßte, so kann man durch einen beliebigen Punkt auf AD z. E. durch A die Linie AN mit der 6ten Stundenlinie Df6 parallel, und FAf auf Df6 senkrecht ziehen. Man bemerkt sodann den Punkt N, wo AN die dritte Stundenlinie durchschneidet, und indem man  $AF = AN$  macht, so hat man den Punkt F gefunden, welcher die Winkel  $\angle AF_{11}, \angle AF_{10}, \angle AF_9, \angle AF_8$  &c.  $= 15, 30, 45, 60$  &c. Graden macht, und demnach zur Eintheilung der Linie NA gebraucht werden kann. Auf gleiche Art läßt sich z. E. durch die dritte Stundenlinie eine mit der 9ten Stundenlinie parallelaufende Linie ziehen, welche in Absicht auf die dritte Stundenlinie eben den Dienst thun wird, den NA in Absicht auf die zwölfte Stundenlinie that.

Fig. 7

§. 15.

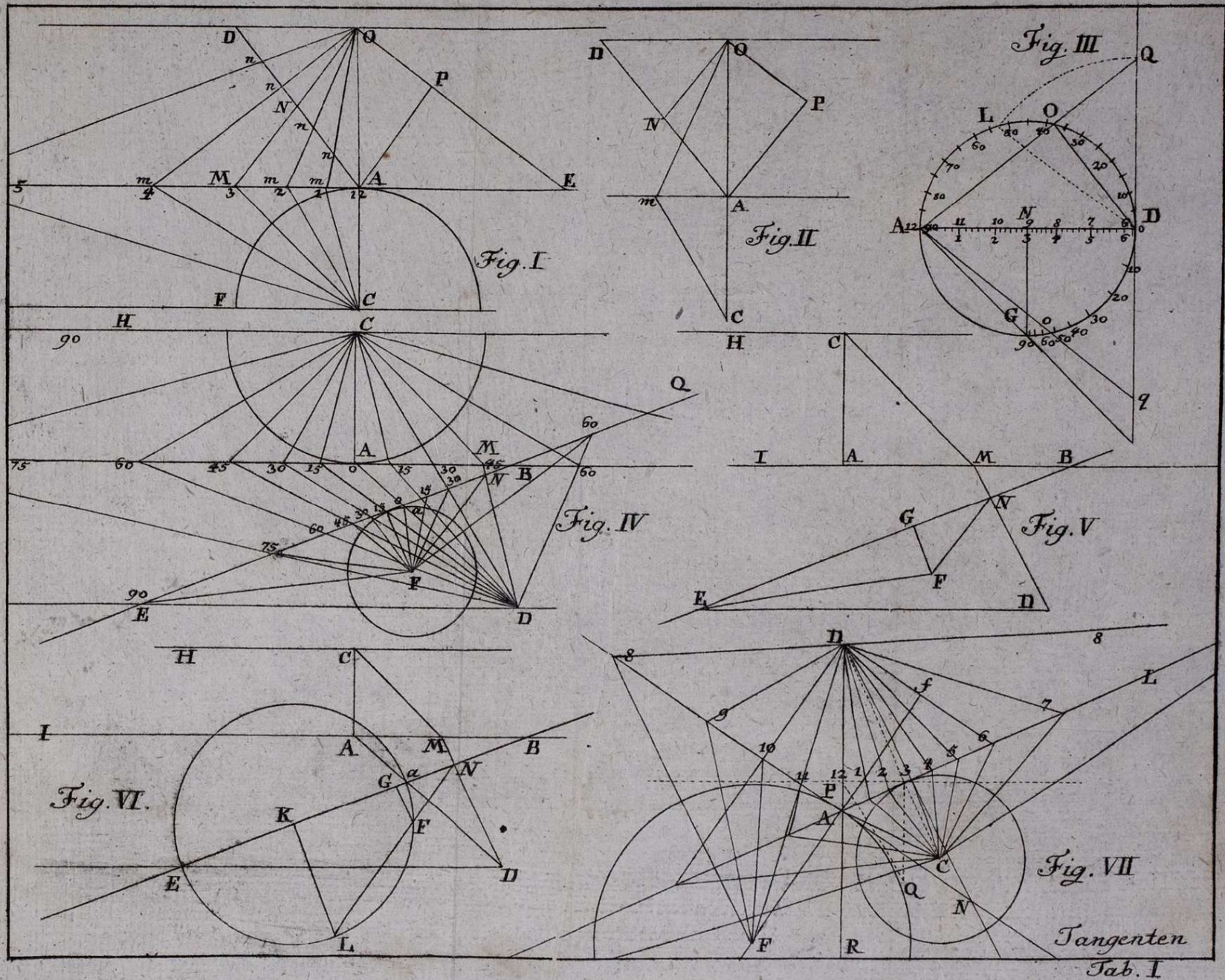
Es sey nun z. E. DAR die Verticallinie einer Wanduhr, welche um den Winkel  $\angle RPQ$  vom Mittage westwärts abweicht, AL die Aequinoctiallinie, DC die Substylarlinie. Da nun besonders für die 8te und 9te Stundenlinie, die Aequinoctiallinie sehr verlängert werden müßte, so kann man durch einen beliebigen Punkt auf AD z. E. durch A die Linie AN mit der 6ten Stundenlinie Df6 parallel, und FAf auf Df6 senkrecht ziehen. Man bemerkt sodann den Punkt N, wo AN die dritte Stundenlinie durchschneidet, und indem man  $AF = AN$  macht, so hat man den Punkt F gefunden, welcher die Winkel  $\angle AF_{11}, \angle AF_{10}, \angle AF_9, \angle AF_8$  &c.  $= 15, 30, 45, 60$  &c. Graden macht, und demnach zur Eintheilung der Linie NA gebraucht werden kann. Auf gleiche Art läßt sich z. E. durch die dritte Stundenlinie eine mit der 9ten Stundenlinie parallelaufende Linie ziehen, welche in Absicht auf die dritte Stundenlinie eben den Dienst thun wird, den NA in Absicht auf die zwölfte Stundenlinie that.

numérateur et le dénominateur soient tous deux égaux à 0. Mais comme ce n'est pas le cas, on voit qu'il existe des cas où l'on peut choisir n'importe quel angle pour  $\varphi$ .

§ 15.

Soit, par exemple, DAR la ligne verticale d'une horloge murale qui s'écarte de midi vers l'ouest d'un angle  $\angle RPQ$ , AL la ligne équinoxiale et DC la ligne substylaire. Comme, notamment pour les lignes des 8e et 9e heures, la ligne équinoxiale devrait être considérablement allongée, on peut, à partir d'un point quelconque sur AD, par exemple A, tracer la ligne AN parallèle à la ligne des 6e heures Df6, et FAf perpendiculaire à Df6. On note alors le point N, où AN coupe la troisième ligne horaire, et en posant  $AF = AN$ , on trouve le point F, qui forme les angles  $\angle AF_{11}, \angle AF_{10}, \angle AF_9, \angle AF_8$ , etc.  $= 15, 30, 45, 60$ , etc. degrés, et qui peut donc être utilisé pour diviser la ligne NA. De la même manière, on peut par exemple tracer, à partir de la troisième ligne horaire, une ligne parallèle à la 9e ligne horaire, qui, par rapport à la troisième ligne horaire, remplira exactement le même rôle que NA par rapport à la douzième ligne horaire.

[1] Georg Wolfgang Krafft (1701-1754)



Tangenten  
Tab. I