UNIVERSITÉ DE BESANÇON

OBSERVATOIRE

ASTRONOMIQUE, CHRONOMÉTRIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE

SUR UN PROBLÈME DE GNOMONIQUE

NOTE DE M. L.-J. GRUEY

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE

Sur un problème de gnomonique.

Note de M. L.-J. Gruey

Errata.

(1), page 1 intercaler *à l'extrémité sud en*

(2), page 2, intercaler *pour*

(3) page 6, intercaler *elle*

Sur un problème de gnomonique.

Note de M. L.-J. Gruey.

Le problème que nous allons résoudre, dans toute sa généralité, a été posé par Lalande, dans un cas particulier, à l'occasion du cadran solaire que l'on voit encore avant d'entrer dans l'église de Brou, près de Bourg. (Mémoires de l'Académie des Sciences, 1757; Encyclopédie méthodique, article cadran).

L'architecte de cette célèbre basilique, Colomban, qui vivait à Dijon vers le commencement du XVIe Siècle, est probablement l'inventeur de ce singulier cadran que Lalande fit restaurer à ses frais, comme une curiosité astronomique digne d'être conservée.

Ce cadran se compose de vingt-quatre bornes cubiques, plantées dans le sol horizontal et distribuées sur une ellipse, symétriquement par rapport aux axes dont le petit va du nord au sud. Les vingt-quatre heures de jour et de nuit sont gravées progressivement sur la face supérieure des bornes successives, la douzième et la vingt-quatrième heure étant respectivement[1] à l'extrémité nord du petit axe. Sur le petit axe, c'est-à-dire sur la ligne NS, est plantée une dalle longue et étroite représentant la ligne méridienne et sur laquelle sont marqués les signes du zodiaque ou les initiales des mois correspondants, dans l'ordre de leur succession.

Le style n'existe pas, et c'est là l'une des curiosités de ce cadran. Pour avoir l'heure, l'observateur se place debout, sur le point de NS répondant au jour courant; son corps joue le rôle d'un style vertical dont l'ombre passe par l'heure demandée.

Après avoir vainement cherché dans tous les traités et mémoires de gnomonique une théorie de ce cadran, Lalande en donne une, ou plutôt une vérification, dans les recueils cités plus haut, où il se borne au cas d'un style vertical dont l'ombre est reçue par un plan horizontal.

Généralisons d'abord un peu le problème en supposant au style, mobile sur NS, une direction fixe, mais quelconque dans le plan méridien.

Cherchons sous quelles conditions il est possible d'avoir l'heure vraie en donnant à ce style une position ne dépendant que du jour ou de la déclinaison $\mathcal{D}$ du soleil, et à la borne portant l'heure h, une position ne dépendant que de h.

Nous allons trouver, sans peine, des conditions algébriques si simples qu'elles suggèrent immédiatement la vue géométrique directe, qui a dû conduire Colomban à son cadran.

Soient

φ . . . , la colatitude du lieu ;

I , le pied du style pris pour centre de la sphère céleste ;

$e\,n\,o\,s$, le grand cercle de l'horizon.

Prenons ce plan(*) plan de figure et désignons, sur la sphère, par :

Z , le zénith ;

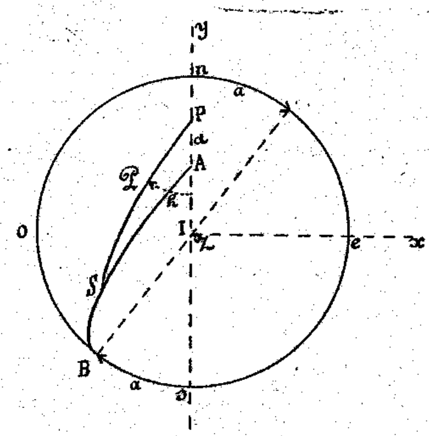
P . le pôle nord ;

nZs , le plan méridien ;

A , l'extrémité du style ;

α , la distance polaire PA de cette extrémité ;

$S, \mathcal{P}$, la position du Soleil et sa distance polaire un jour donné à l'heure vraie h.



Le grand cercle AS coupe l'horizon en B et $a = \widehat{BZs}$ est l'azimut, compté de n vers e, de la direction de l'ombre du style.

Or le triangle sphérique BAs, rectangle en s, dans lequel $As = 90 + \varphi - \alpha$, donne :

$$tg\,a = tg\,A \,.\, \sin A s = tg\,A \cos(\varphi - \alpha).$$

Mais le triangle sphérique PAS, où $PS = \mathcal{P}$ et $\widehat{APS} = h$, donne A par la formule

$$\cot \mathcal{P} \sin \alpha = \cos \alpha \cos h - \sin h \cot A.$$

Éliminant A entre ces deux relations, on a :

(1) $$\cot a = (\cos \alpha \cos h - \sin \alpha \cot \mathcal{P}) \sec(\varphi - \alpha) \operatorname{cosec} h$$

La direction de l'ombre, par suite a ne changent pas par une translation du style. Rapportons le pied du style et les bornes horaires aux droites rectangulaires $o e$, $n s$ prises respectivement pour axes des x et des y.

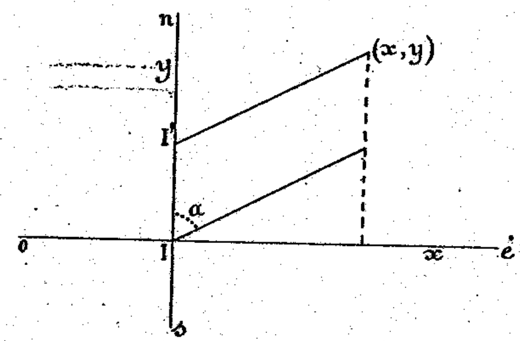


Fig. 2

Soient :

I', le pied du style transporté ;

δ, la distance II' ;

x, y, les coordonnées de la borne portant l'heure h.

Pour que l'ombre du style se dirige sur cette borne à l'heure h, il faut que δ, x, y satisfassent à la relation :

(2) $$\delta = y - x \cot a,$$

évidente sur la figure (2).

Il est facile de montrer que cette relation est possible, mais d'une seule manière, en choisissant convenablement, pour δ, une fonction de la seule variable $\mathcal{P}$ et pour x, y, certaines fonctions de la seule variable h.

δ ne devant dépendre que de $\mathcal{P}$, on doit avoir la condi-

$$\frac{\partial \delta}{\partial h} = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dh} = x \, \frac{\partial . \cot a}{\partial h} + \frac{dx}{dh} \cot a$$

ce qui donne, en remplaçant $\cot.\alpha$ et $\frac{\partial \cot\alpha}{\partial h}$ par leurs valeurs tirées de (1) et en réunissant les termes en $\cot.\mathcal{P}$:

$$(3) \qquad \frac{dy}{dh} = \sin\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\ \text{cosec}\ h\ \cot\mathcal{P}\ \left(x\cot h - \frac{dx}{dh}\right)$$

$$- \cos\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\ \text{cosec}\ h\ \left(x\ \text{cosec}\ h - \cos h\ \frac{dx}{dh}\right).$$

Pour que y ne dépende que de h, il faut que le coëfficient de $\cot\mathcal{P}$ soit nul, ou que l'on ait :

$$\frac{dx}{x} = \cot.\ h\ dh$$

d'où

$$(4) \qquad x = C\sin h,$$

C étant une constante arbitraire ; et, par suite, en vertu de la formule (3) :

$$\frac{dy}{dh} = -C\cos\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\sin h$$

d'où

$$(5) \qquad y = C\cos\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\cos h + C'$$

C' étant une nouvelle constante arbitraire.

En substituant dans (2) les valeurs (4) et (5) de x et de y, nous avons :

$$(6) \qquad \delta = C\sin\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\cot\mathcal{P} + C'.$$

Une variation de la constante C' n'a pour effet que de donner aux bornes et au style une translation commune, parallèle à NS et mesurée par cette variation. Nous pouvons donc supposer $C' = 0$, sans altérer la généralité de la construction pratique du cadran.

Le problème généralisé de Lalande admet donc une solution unique donnée par les trois formules :

$$(7) \qquad \begin{cases} x = C\sin h, \\ y = C\cos\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\cos h, \\ \delta = C\sin\alpha\ \text{séc}\,(\varphi-\alpha)\cot\mathcal{P}. \end{cases}$$

La première montre que les abscisses x sont indépendantes de α et de φ.

On voit que les bornes sont distribuées sur une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ns et eo. L'axe dirigé suivant eo est constant et égal à 2C, quel que soit α ; l'autre axe, égal à $2C\cos\alpha \times \text{séc}(\varphi-\alpha)$, peut prendre toutes les valeurs lorsque α ou la direction du style varient

Pour $\alpha = 0$, les axes sont $2C$, $2C \sec \varphi$ et on a, quel que soit $\mathcal{P}$, $\delta = 0$. Le style est immobile ; on retombe sur le cadran horizontal ordinaire dont les lignes horaires seraient remplacées par vingt-quatre bornes distribuées sur une ellipse.

Pour $\alpha = \frac{\varphi}{2}$, les axes sont tous deux égaux à $2C$, le cadran devient circulaire.

Pour $\alpha = \varphi$, les axes sont $2C$ et $2C \cos \varphi$ et on a $\delta = C \sin \varphi \cot \mathcal{P}$: le cadran est celui de Colomban.

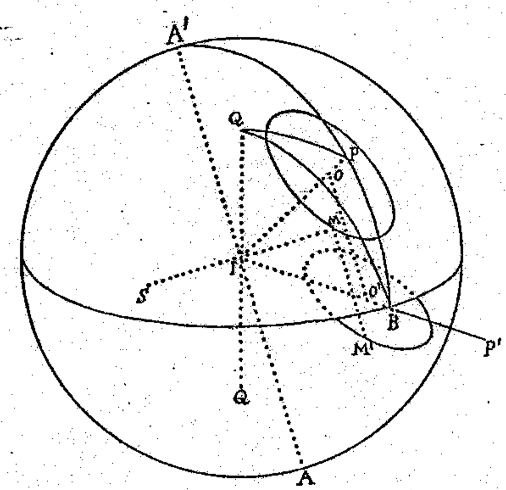
Mais ce n'est évidemment pas ainsi que Colomban a trouvé son cadran. Nous pensons qu'il y a été conduit par une vue géométrique directe analogue à celle que la simplicité des résultats précédents nous suggère et que nous allons exposer brièvement dans toute sa généralité.

Désignons par

I, le pied d'un style situé ou non dans le plan méridien ;

$\mathcal{D}$, la déclinaison du soleil, un jour donné.

Imaginons la sphère céleste ayant pour centre le point I et pour rayon $C \sec \mathcal{D}$, C étant la constante dont nous avons parlé plus haut.



Soient, sur cette sphère :

P, le pôle nord ;

A, A', l'extrémité du style et le point diamétralement opposé ;

Q, Q', les pôles du plan, d'ailleurs quelconque, du cadran.

A l'heure h, le soleil est en S. Je désigne par M le point diamétralement opposé à S sur la sphère céleste. Quand S décrit son petit cercle dû au mouvement diurne, M décrit un petit cercle symétrique de celui-là par rapport au centre I et, par suite, perpendiculaire à IP. Soit O son centre, situé sur IP; son rayon est

$$OM = IM \sin OIM = C \text{ séc } \omega \cos \omega = C .$$

Quand ω varie, le cercle O se déplace donc parallèlement à lui-même et son centre O décrit IP, mais son rayon reste constant.

Projetons ce cercle sur le plan du cadran, parallèlement à IA. La projection sera une ellipse ayant pour centre la projection O' de O et le point M se projettera en M' sur cette ellipse. MM' étant parallèle à IA est situé dans le plan SIA de l'ombre, et par suite, l'ombre est dirigée suivant IM': M' est donc la position de la borne correspondant à l'heure h.

Quand ω varie, l'ellipse se transporte parallèlement à elle-même, sans déformation, avec ses bornes horaires invariablement fixées sur et son centre O' décrit la droite IP' projection de IP. La position de cette ellipse est donc définie par la longueur $\delta = IO'$ qu'il est facile de calculer.

Pour définir le cadran, il faut se donner les positions par rapport à P des points A' et Q, c'est-à-dire les arcs PA', PQ et leur angle $A'PQ$.

Posons

$$PA' = \alpha \quad , \quad PQ = \beta \quad , \quad \widehat{A'PQ} = p \;;$$
$$A'Q = m \;, \quad A'PB = \gamma \;.$$

B étant l'intersection du grand cercle $A'P$ avec le grand cercle du cadran.

Le triangle rectilatère $QA'B$ donne

$$0 = \cos m \cos \gamma + \sin m \sin \gamma \cos A'$$

d'où

$$\operatorname{tg} \gamma = - \cot m \text{ séc } A' \;.$$

Le triangle $A'PQ$ donne :

$$\begin{cases} \cos m = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos p \\ \sin m \cos A' = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos p \end{cases}$$

d'où, en divisant membre à membre et changeant les signes :

$$tg\,\gamma = -\,\frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos p}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\cos p} \quad ,$$

formule qui donne γ en fonction des données α, β, p.

Ayant γ, le triangle rectiligne IOO' donne :

$$\frac{IO'}{\sin\alpha} = \frac{IO}{\sin\gamma} \; .$$

Mais dans le triangle IOM, rectangle en O, on a :

$$IO = IM \sin\omega = C\,tg\,\omega \; ;$$

on a donc

$$\delta = C \sin\alpha \operatorname{coséc}\gamma \; tg\,\omega \; , \tag{8}$$

ce qui définit la position de l'ellipse par rapport au style.

Il est évident qu'au lieu de laisser le style fixe et d'imprimer à l'ellipse une translation définie en fonction de ω par la valeur (8) de δ, nous pouvons laisser l'ellipse fixe et imprimer au style une translation $-\delta$.

Il est évident aussi que, dans un tel cadran, la direction de l'ombre à midi n'est pas, en général, dans le plan méridien.

Remarquons enfin que, pour une position donnée du cadran, on peut toujours choisir le style de façon que, pour un jour donné, l'ombre de midi soit dirigée suivant une droite quelconque ID du plan du cadran ; il suffit évidemment pour cela de prendre pour style une droite quelconque IA du plan mené par ID et par la position méridienne S du soleil pour ce jour.

Nous terminons cette note par une table numérique et une épure.

La table numérique est construite dans l'hypothèse d'un cadran horizontal à style mobile vertical. Dans ces conditions, on a $\alpha = \varphi$ et les formules (7) deviennent :

$$(9) \quad \begin{cases} x = C \sin h \; , \\ y = C \cos\varphi \cos h \; , \\ \delta = C \sin\varphi \cot \mathcal{P} . \end{cases}$$

Usage de la table.

Pour la construction de cette table, nous avons pris pour unité la longueur du demi grand axe de l'ellipse lieu des bornes horaires.

Cette table donne, de 2° en 2° et pour des latitudes variant de 30° à 60°, les coordonnées x, y de chacune des bornes horaires situées dans l'angle des directions positives des axes de coordonnées ainsi que les positions des trois premiers signes du zodiaque par leurs distances δ au centre de l'ellipse, distance comptée sur l'axe des y. La borne correspondant à la 6e heure est à l'extrémité du grand axe et a pour coordonnées quelle que soit la latitude

$$x = 1 \ , \ y = 0 \ .$$

Les positions des autres bornes et des autres signes du zodiaque se déduisent immédiatement des précédentes en tenant compte des symétries par rapport aux deux axes de coordonnées.

Pour une latitude non donnée dans la table et comprise dans les limites 30°–60°, on obtiendra les nombres x, y et δ en interpolant par parties proportionnelles.

Enfin pour une longueur a du demi grand axe de l'ellipse, on multipliera par a tous les nombres tirés de la table.

Epure.

L'épure a été construite au moyen des éléments tirés de la table en prenant pour latitude celle de Besançon

$$\lambda = 47°15' \ .$$

On a supposé un cordon elliptique sur lequel sont gravées les heures.

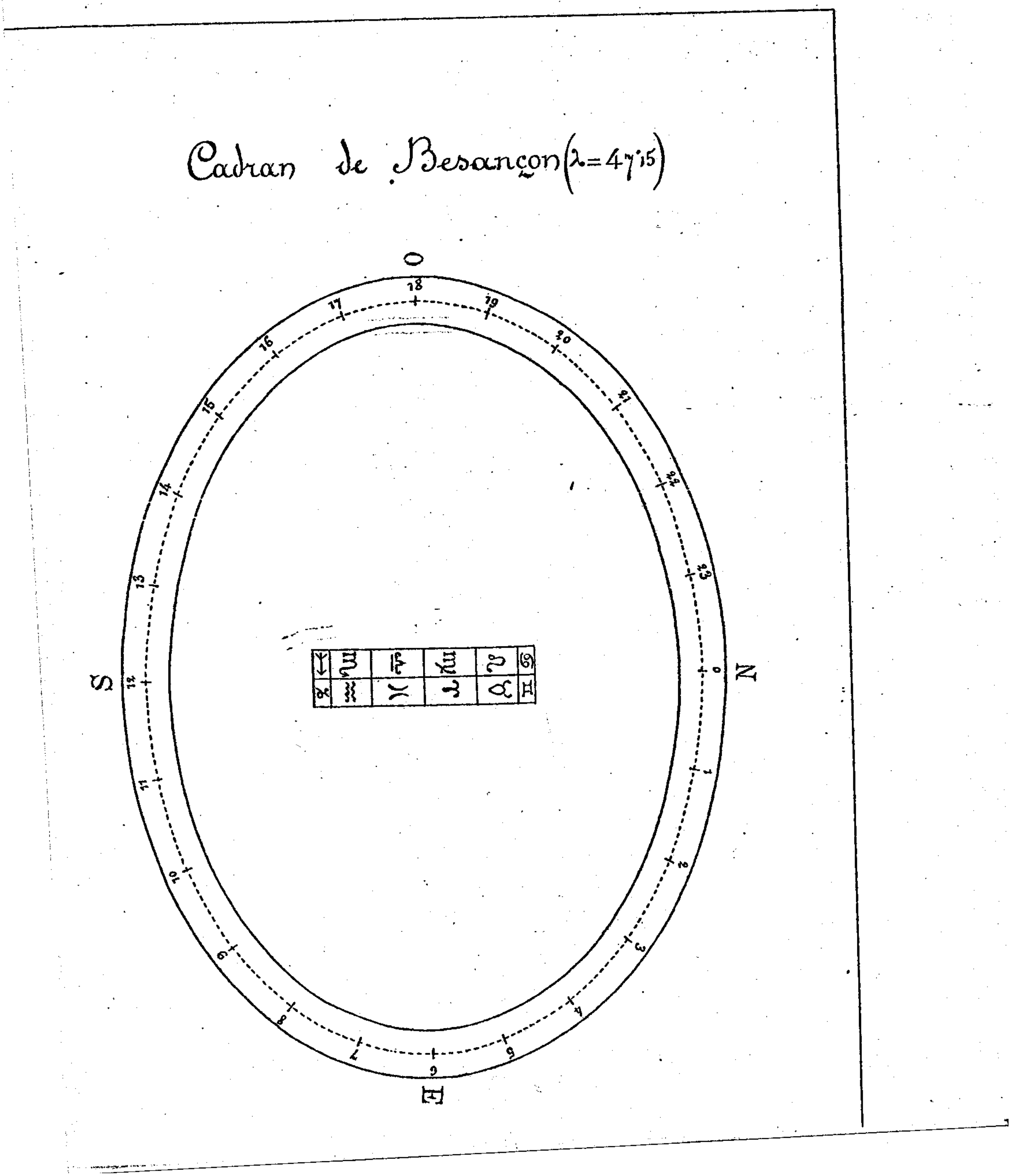
Cas particulier d'un cadran horizontal à style mobile vertical.

Valeurs de x, y, δ, calculées d'après les formules (9).

Arguments horizontaux : 1° h = heure solaire vraie.
2° $\mathfrak{L}$ = longitude du soleil.
Argument vertical : λ = latitude du lieu.

λ	h						$\mathfrak{L}$		
	0	1	2	3	4	5	30°	60°	90°
	y						δ		
30	0,500	0,483	0,433	0,354	0,250	0,129	0,176	0,318	0,376
32	0,530	0,512	0,459	0,375	0,265	0,137	0,172	0,311	0,368
34	0,559	0,540	0,484	0,395	0,280	0,145	0,168	0,304	0,360
36	0,588	0,568	0,509	0,416	0,294	0,152	0,164	0,297	0,351
38	0,616	0,595	0,533	0,435	0,308	0,159	0,160	0,289	0,342
40	0,643	0,621	0,557	0,455	0,321	0,166	0,156	0,281	0,332
42	0,669	0,646	0,579	0,473	0,335	0,173	0,151	0,273	0,322
44	0,695	0,671	0,602	0,491	0,347	0,180	0,146	0,264	0,312
46	0,719	0,695	0,623	0,509	0,360	0,186	0,141	0,255	0,301
48	0,743	0,718	0,644	0,525	0,372	0,192	0,136	0,246	0,290
50	0,766	0,740	0,663	0,542	0,383	0,198	0,131	0,236	0,279
52	0,788	0,761	0,682	0,557	0,394	0,204	0,125	0,226	0,267
54	0,809	0,781	0,701	0,572	0,405	0,209	0,119	0,216	0,255
56	0,829	0,801	0,718	0,586	0,415	0,215	0,114	0,205	0,243
58	0,848	0,819	0,734	0,600	0,424	0,219	0,108	0,195	0,230
60	0,866	0,837	0,750	0,612	0,433	0,224	0,102	0,184	0,217
	x						Quel que soit λ, pour $\mathfrak{L} = 0$, on a toujours $\delta = 0$		
[illegible]conque	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966			

Cadran horizontal à style mobile vertical.



Construction pratique d'un cadran horizontal à style mobile vertical.

La construction d'un cadran horizontal à style mobile vertical, sur le sol préalablement nivelé, comporte deux opérations principales dont nous allons résumer la pratique en quelques mots.

1° Tracer la méridienne.

2° Marquer les points horaires et les points zodiacaux.

Il se présente deux cas suivant que l'on a ou non à sa disposition un petit cercle azimutal, muni d'une lunette.

I – On n'a pas de cercle azimutal.

1° On détermine la méridienne au moyen de l'étoile polaire en employant la méthode indiquée dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes.

On dispose à quelque distance l'un de l'autre et à peu près dans le méridien deux fils à plomb, l'un fixe et l'autre rectifiable de l'ouest à l'est. A l'heure du passage de nuit, au méridien, de l'étoile polaire, on déplacera le second fil jusqu'à ce qu'il soit dans le plan déterminé par le premier et la polaire.

Le méridien est alors défini par les deux fils ; sa trace sur le sol horizontal est la méridienne. Une erreur de plusieurs minutes dans l'heure du passage ne produit pas d'erreur appréciable sur la direction de cette ligne.

2° Sur la méridienne, on choisit le centre O de l'ellipse dont les axes sont dirigés : le petit, Oy, suivant cette méridienne et le grand, Ox, suivant la perpendiculaire à Oy.

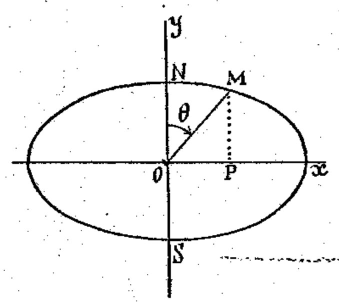
Pour obtenir le point M dont les coordonnées x, y répondent à l'heure h, on prendra sur le grand axe, à partir du centre, une longueur OP égale à l'obscisse x ; par un procédé quelconque, on élèvera en P une perpendiculaire à Ox, sur laquelle on prendra une longueur PM égale à l'ordonnée y : le point M, ainsi obtenu, sera le point cherché.

Quant aux points zodiacaux, on les déterminera en mesurant sur le petit axe, à partir du centre, des longueurs égales aux valeurs de δ correspondantes à

$$\mathcal{L} = 30^\circ, \ \mathcal{L} = 60^\circ \text{ et } \mathcal{L} = 90^\circ$$

II – On dispose d'un cercle azimutal.

On se donne C, par suite les axes $2a$, $2b$ de l'ellipse horaire.



Le rayon vecteur OM répondant à l'heure h fait avec la méridienne Oy un angle θ, calculable par la formule très simple

$$tg\,\theta = \frac{x}{y} = sec\,\varphi\ tg\,h = cosec\,\lambda\ tg\,h.$$

Il est à remarquer que θ est indépendant de C, c'est-à-dire des dimensions du cadran.

Le calcul préalable de θ étant effectué pour des valeurs de h équidistantes, soit de une heure, une demi-heure, ou même un quart d'heure, suivant la précision demandée, on installera le cercle azimutal, bien nivelé, au centre O choisi.

1° Pour tracer la méridienne, on visera l'étoile polaire de préférence au moment de sa plus grande digression orientale ou occidentale, et on notera la lecture au cercle horizontal ainsi que l'heure de l'observation, laquelle fournira l'angle horaire de l'etoile.

La Connaissance des Temps renferme une table qui donne pour chaque latitude comprise entre 10° et 65°, l'azimut A de la polaire en fonction de son angle horaire.

On fera tourner la lunette, en azimut, de l'angle A, dans le sens convenable. Alors la lecture au cercle sera ℓ_0, la lunette visera dans le méridien et l'on pourra jalonner la méridienne.

2° On tracera le grand axe de l'ellipse en faisant varier l'azimut de la lunette de 90° à partir de ℓ_0. On déterminera ensuite les foyers de cette ellipse dont on connait les deux axes et l'on pourra tracer cette courbe par le mouvement continu d'un piquet tendant une corde de longueur $2a$, dont les extrémités sont fixées aux foyers.

Enfin, déplaçant la lunette en azimut successivement, à partir de ℓ_0, d'angles égaux aux θ calculés, et visant suivant OM l'ellipse tracée, on déterminera chacun des points horaires M demandés, qui se trouvent à l'intersection de cette ellipse et de OM.

Quant aux points zodiacaux, on les déterminera comme précédemment.

Cette seconde méthode est beaucoup plus rapide et surtout beaucoup plus précise que la première.

C'est celle que nous avons employée à l'Observatoire où un cadran de 6m de grand axe donne l'heure vraie avec une erreur maximum de 30s, pourvu que l'on emploie un fil à plomb comme style mobile.