
Cadran solaire portable à double limbe

par Denis Savoie¹

Dans la vaste famille des cadrans solaires portables de hauteur, un des plus simples à tracer est celui publié en 1513 par Stöffler où les lignes horaires sont des droites qui joignent deux limbes. Il fonctionne avec un fil et une perle coulissante comme le cadran Capucin ; mais son procédé de détermination de l'heure n'est pas tout à fait rigoureux.

En 1513, l'astronome allemand, mathématicien et fabricant d'instruments Johannes Stöffler (1452–1531) publie à Oppenheim un des premiers ouvrages imprimés consacré aux astrolabes, *Elucidatio fabrica ususque astrolabii*, qui sera traduit en français par Jean-Pierre de Mesme et Guillaume des Bordes² en 1560.

Presque à la fin de l'ouvrage (f. LXVI^{r.v}), Stöffler décrit un cadran solaire portable à lignes horaires rectilignes (en heures égales), valable pour une latitude fixe, dont il donne un dessin (fig. 1 et 2 page suivante), et qu'il appelle *horarium bilimbatum*, que l'on peut traduire par « cadran à double limbe » (*bi-limbatum* = deux limbes) puisqu'il y a un *limbus minor* et un *limbus maior* qui jouent un rôle essentiel dans la lecture de l'heure. Le cadran, repris notamment par Oronce Fine³ en 1532 dans son *Protomathesis*, était probablement connu dès le XV^e siècle voire même avant (fig. 3 page 160) ; facile à tracer, sa particularité tient au fait qu'il y a repliement des deux solstices (été et hiver) sur un seul et même arc de cercle (*limbus maior*). Si l'on connaît quelques exemplaires réalisés⁴, ce cadran n'a pas connu un grand succès, bien qu'il soit peint

1. Universcience et Observatoire de Paris.

2. *Traité de la composition et fabrique de l'astrolabe*, Paris, 1560, p. 187–191. Le mathématicien Guillaume des Bordes, qui signe la préface, est aussi l'auteur des gravures. Le cadran est appelé *quadran Bilimbat*. et la perle *margarite*.

3. f. 189^r–190^r. Oronce Fine a modifié le zodiaque (qu'il a reporté sur le grand limbe) de Stöffler en traçant deux arcs de cercle au milieu de son tracé qui correspondent à l'entrée du Soleil dans un signe zodiacal. D'autre part la distinction entre les deux semestres équinoxiaux de l'année qui, chez Stöffler, est indiquée par une différenciation des chiffres, ne se fait plus chez Fine que par les indications *pars aestivalis* et *pars hiemalis* selon l'inclinaison générale des lignes d'heures.

4. Voir le catalogue *Time*, éd. A. J. Turner, The Hague, 1990, p. 124–125 ; Steven A. Lloyd, *Ivory Diptych Sundials*, éd. Harvard University, 1992, p. 114–115 ; catalogue de Dominique et Éric Delalande, *Cadrans solaires*,

en 1533 sur le très célèbre tableau *Les Ambassadeurs* de Hans Holbein le Jeune⁵ (fig. 4 page suivante). On se propose ici d'expliquer le fonctionnement de ce cadran et de montrer qu'il n'est rigoureux qu'aux équinoxes et aux solstices⁶.

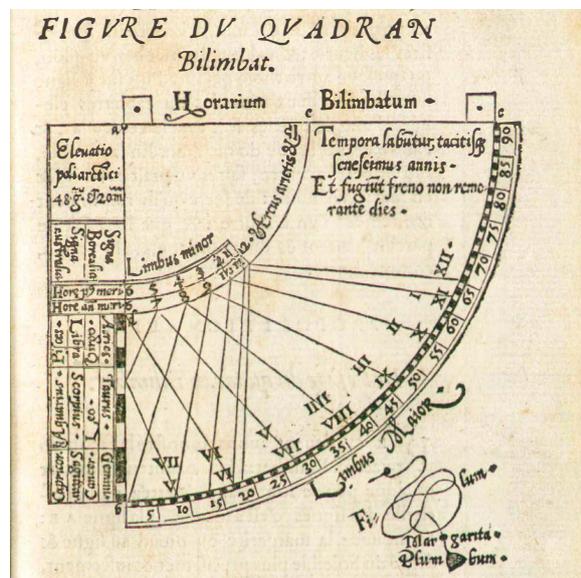
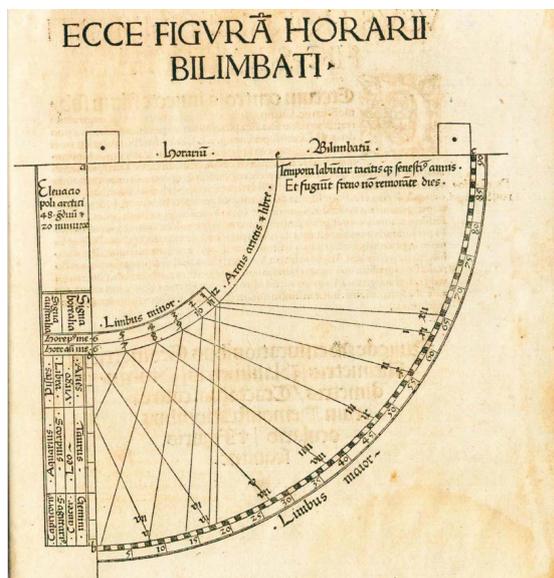


FIGURE 1 – Dessin donné par Stöffler en 1513 du cadran à double limbe.

FIGURE 2 – Le dessin de Stöffler est repris en 1560 dans la traduction française et appelé *Quadrant Bilimbat*.

1 Fonctionnement

Ce cadran portable a la forme d'un quart de cercle (fig. 5 page 161), surmonté de deux pinnules qui servent à viser le Soleil (une est percée d'un œilleton qui laisse entrer les rayons du Soleil, lesquels doivent tomber sur l'autre pinnule parallèle où est inscrit un point repère). Dans le coin supérieur gauche du cadran, centre des deux limbes, est fixé un fil lesté (d'un plomb) muni d'une perle coulissante. Pour une date donnée, on cale la perle sur l'échelle zodiacale, qui peut être soit verticale, soit horizontale ; on vise le Soleil en maintenant le cadran vertical et la position de la perle sur le réseau de droites horaires indique l'heure solaire vraie. Pour utiliser le cadran, on doit caler la perle du fil sur le rayon R_0 qui correspond à la date du jour à midi vrai.

La difficulté de ce cadran tient dans son double réseau de lignes d'heures croisées : de l'équinoxe de printemps à celui d'automne, donc lorsque la déclinaison du Soleil est positive, on lit l'heure sur les lignes en chiffre romain, tandis que de l'équinoxe d'automne à celui de printemps, donc en déclinaison négative du Soleil, on lit l'heure sur les lignes en chiffre arabe. Ce croisement des lignes en fonction de la déclinaison est l'inconvénient du repliement des deux

Paris, 2013, p. 112. Un bel exemplaire se trouve au musée Galileo de Florence (inv. 1495, 2465), réalisé par Tobias Volckmer en 1608 (fig. 10 page 165).

5. On voit d'ailleurs que le peintre s'est inspiré de Stöffler (distinction dans le réseau des lignes horaires par chiffres romains et arabes) et non de Oronce Fine. Le cadran à double limbe figure néanmoins chez un auteur du XX^e siècle comme Girolamo Fantoni, *Orogoli Solari*, ed. Technimedia, Rome, 1988, p. 365–366. Voir également Carlo Cesare Scaletti, *Epitome Gnomonica*, Bologne, 1702, p. 100–102, où l'on trouve à la fois un cadran en heure solaire classique et un cadran à heures italiques.

6. Ce cadran portable partage ce point commun avec la *Navicula*.

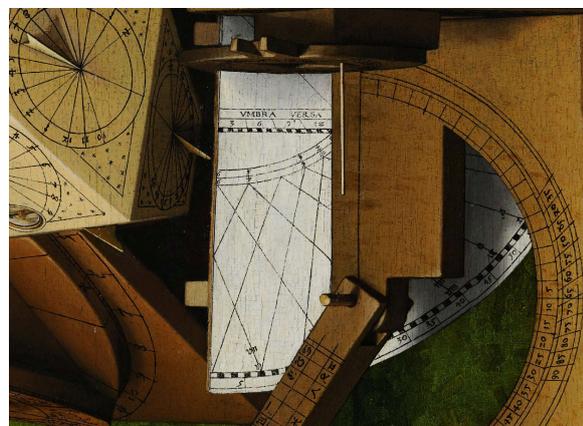
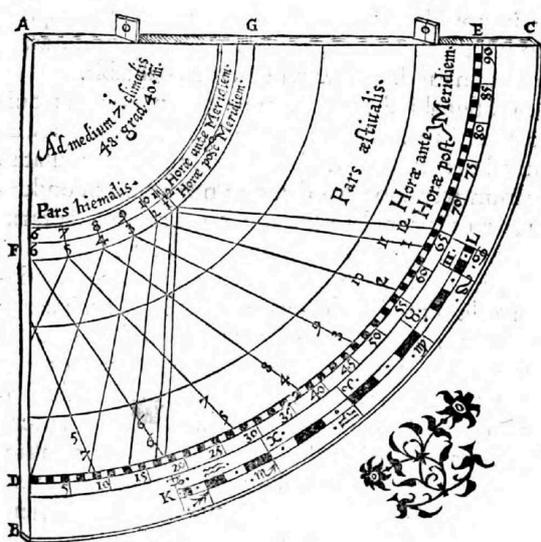


FIGURE 3 – Dessin donné par Oronce Fine en 1532 du cadran à double limbe. L'échelle zodiacale de Holbein : on reconnaît en blanc le tracé de lignes latérale est remplacée par deux cercles (entre les deux limbes) qui correspondent à l'entrée du Soleil dans un signe zodiacal.

arcs solsticiaux sur un seul limbe, car on aurait pu avoir un cadran à trois limbes successifs : hiver, équinoxes, été.

2 Tracé du cadran et théorie

Depuis le bord supérieur gauche du cadran, noté P qui est aussi le point de fixation du fil, on trace un arc de cercle de 90° de rayon R_e : c'est le rayon équinoxial (fig. 6 page 162). Toujours depuis P, on trace un second arc de cercle de 90° de rayon R_s : c'est le rayon solsticial.

L'intervalle entre R_e et R_s est laissé à la convenance, mais on peut choisir par exemple $R_s = 2R_e$. On peut tracer le cadran à la règle et au compas en utilisant la graduation du grand limbe⁷ : pour une ligne horaire donnée, on calcule par la formule 1 ou par une table, la hauteur du Soleil à l'équinoxe et au solstice d'été ; on reporte ces deux hauteurs sur le limbe et on joint les deux points par une droite. Il faut faire la même chose pour le solstice d'hiver en reliant les points du grand limbe à l'équinoxe. Si l'éventail horaire de la zone en déclinaison positive doit être limité en théorie à l'heure de coucher du Soleil au solstice d'été, concrètement sous nos latitudes, seule la ligne 19 h peut être tracée (et 5 h), tronquée latéralement. Pour l'éventail horaire de la zone en déclinaison négative, l'heure extrême théorique est celle du coucher du Soleil au solstice d'hiver, de sorte que seule la ligne 17 h (et 7 h) peut être tracée.

Quant à l'échelle zodiacale, son tracé se fait de la façon suivante : pour l'entrée d'un signe (qui correspond à une certaine déclinaison du Soleil), on reporte sur le grand limbe la hauteur du Soleil à midi vrai en utilisant le rayon R_s ; rappelons que hauteur à midi = $(90^\circ - \text{latitude} + \text{déclinaison})$. Le rayon R_s du signe correspond alors à l'intersection de R_s avec la ligne midi (qui doit être tracée en premier).

7. Voir Alessandro Gunella, « Quadranti d'altezza e operatori rinascimentali », *Gnomonica Italiana*, VII, n° 22, 2010, p. 30–33, qui montre les réalisations graphiques de différents abaques.

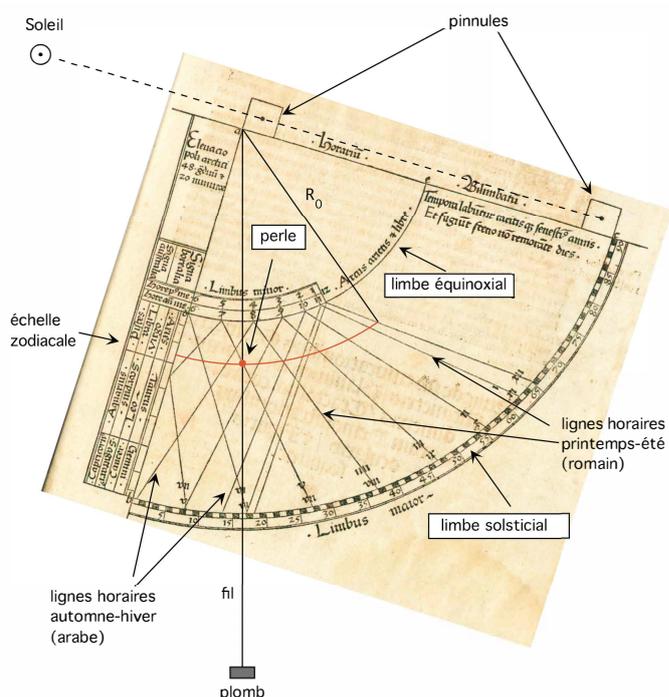


FIGURE 5 – Cadran à double limbe en mode opératoire.

On peut aussi tracer le cadran en utilisant les coordonnées rectangulaires : depuis le point P, faisons passer un système d'axes : x vers la droite, y vers le haut ; les coordonnées d'un point sur une ligne horaire sur le cercle équinoxial se calculent par :

$$\begin{cases} x_e = R_e \sin h_e \\ y_e = -R_e \cos h_e \end{cases}$$

avec $\sin h_e = \cos \varphi \cos H$.

h_e est la hauteur du Soleil au cours de la journée aux équinoxes, φ est la latitude du lieu, δ la déclinaison du Soleil (ici $\delta = 0^\circ$) et H son angle horaire.

De même les coordonnées d'un point sur une ligne horaire sur le cercle solsticial se calculent par :

$$\begin{cases} x_s = R_s \sin h_s \\ y_s = -R_s \cos h_s \end{cases}$$

avec $\sin h_s = \sin \varphi \sin \epsilon + \cos \varphi \cos \epsilon \cos H$.

h_s est la hauteur du Soleil au cours de la journée aux solstices : $+\epsilon$ pour les lignes de déclinaison positive, et $-\epsilon$ pour les lignes de déclinaison négative, ϵ étant l'obliquité de l'écliptique ($\epsilon = 23,433$ actuellement). Une fois les points tracés, on les joint par une ligne horaire droite.

Le rayon R_δ pour construire l'échelle zodiacale des dates (qui peut être verticale ou horizontale ou matérialisée par un cercle) se calcule par :

$$R_\delta = \frac{R_s \sin \delta}{\sin \delta + \frac{R_s}{R_e} \sin (\epsilon - \delta)}$$

Pour $\lambda = 60^\circ$: $\delta = \pm 20,145$, on a $R_0 = 17,32$ cm.

La figure 7 représente le cadran totalement calculé.

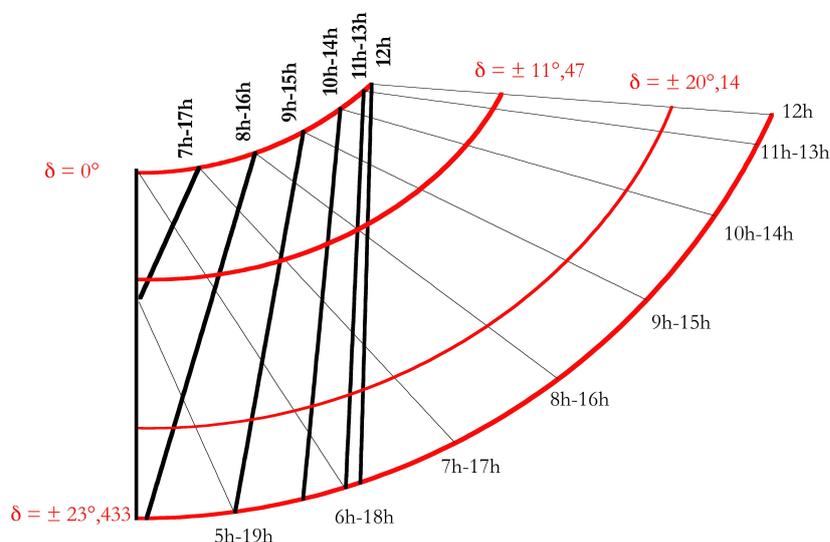


FIGURE 7

3 Exactitude

En théorie, le rayon R_0 de calage de la perle à midi doit être constant toute la journée : or ce n'est pas le cas. Il convient d'abord d'exprimer le rayon R pour une déclinaison quelconque. On a :

$$R = R_s \frac{\cos(h_s + \omega)}{\cos[h + \omega]}$$

où h est la hauteur du Soleil et R le rayon où la perle coupe une ligne. On calcule h par :

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \tag{1}$$

L'angle ω , qui désigne la pente d'une ligne horaire, se calcule par :

$$\tan \omega = \frac{R_s \cos h_s - R_e \cos h_e}{R_s \sin h_s - R_e \sin h_e}$$

Dans le tableau 1 page suivante, on a calculé le rayon R au cours de la journée pour $\delta = +11,47$ en prenant les paramètres de l'exemple précédent :

On note que R s'écarte de R_0 , ce qui entraîne une erreur dans la lecture de l'heure.

Sur la figure 8 page suivante, on voit que pour une certaine déclinaison du Soleil, la perle décrit un cercle de rayon R_0 au cours de la journée ; mais pour une heure H et donc une hauteur h du Soleil, la perle devrait être en I sur la ligne horaire $I_e I_s$ alors qu'avec le rayon R_0 , elle va couper la ligne en I' donc pour une hauteur h' du Soleil : il faut corriger l'heure lue d'une petite quantité dH .

En dérivant la formule 1 en fonction de h et de H , on obtient :

$$dH = - \frac{\cos h \, dh}{\cos \varphi \cos \delta \sin H}$$

TABLE 1

H	R (en cm)	R ₀ (en cm)
0°	14,3	14,3
15°	14,4	14,3
30°	14,5	14,3
45°	14,6	14,3
60°	14,6	14,3
75°	14,6	14,3
90°	14,4	14,3

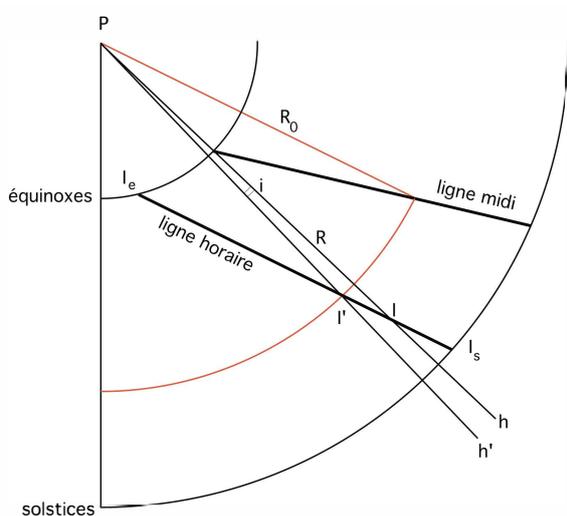


FIGURE 8

Correction à l'heure lue

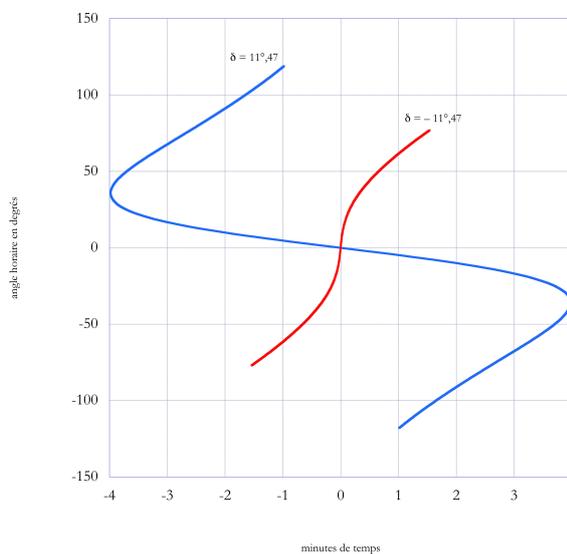


FIGURE 9

On voit sur la figure 8 que la variation dh correspond à l'angle i qui est la petite variation de la hauteur du Soleil pendant que la perle passe de I' en I . On calcule i par :

$$\sin i = \frac{R - R_0}{R_0} \tan (h + \omega)$$

d'où

$$dH = -\frac{i \cos h}{\cos \varphi \cos \delta \sin H}$$

Exemple avec les paramètres précédents :

$$\delta = 14,81$$

$$H = 35^\circ$$

$$h = 46,04$$

$$R_0 = 14,32 \text{ cm}$$

$$R = 14,58 \text{ cm}$$

$$\omega = 17;87$$

$$i = 0;489$$

$dH = -3,66$ minutes : lorsque le cadran indique 14 h 20 m, il est 14 h 24 m en réalité.

Le signe « - » de dH signifie que le cadran retarde : lorsqu'il est l'heure H au Soleil, le cadran indique l'heure ($H + dH$) ; c'est le contraire le matin. Il est facile de vérifier que la correction dH n'est pas très importante : elle est toujours nulle à midi et atteint ± 4 minutes au maximum sous nos latitudes (printemps-été) en milieu d'après-midi et en matinée, mais augmente lorsque la latitude diminue ; en déclinaison négative du Soleil, la correction est négligeable (voir fig. 9 page précédente).

On vérifie également que la correction est nulle aux équinoxes et aux solstices. Il va de soi qu'une si faible correction est indétectable sur un tel cadran de hauteur.

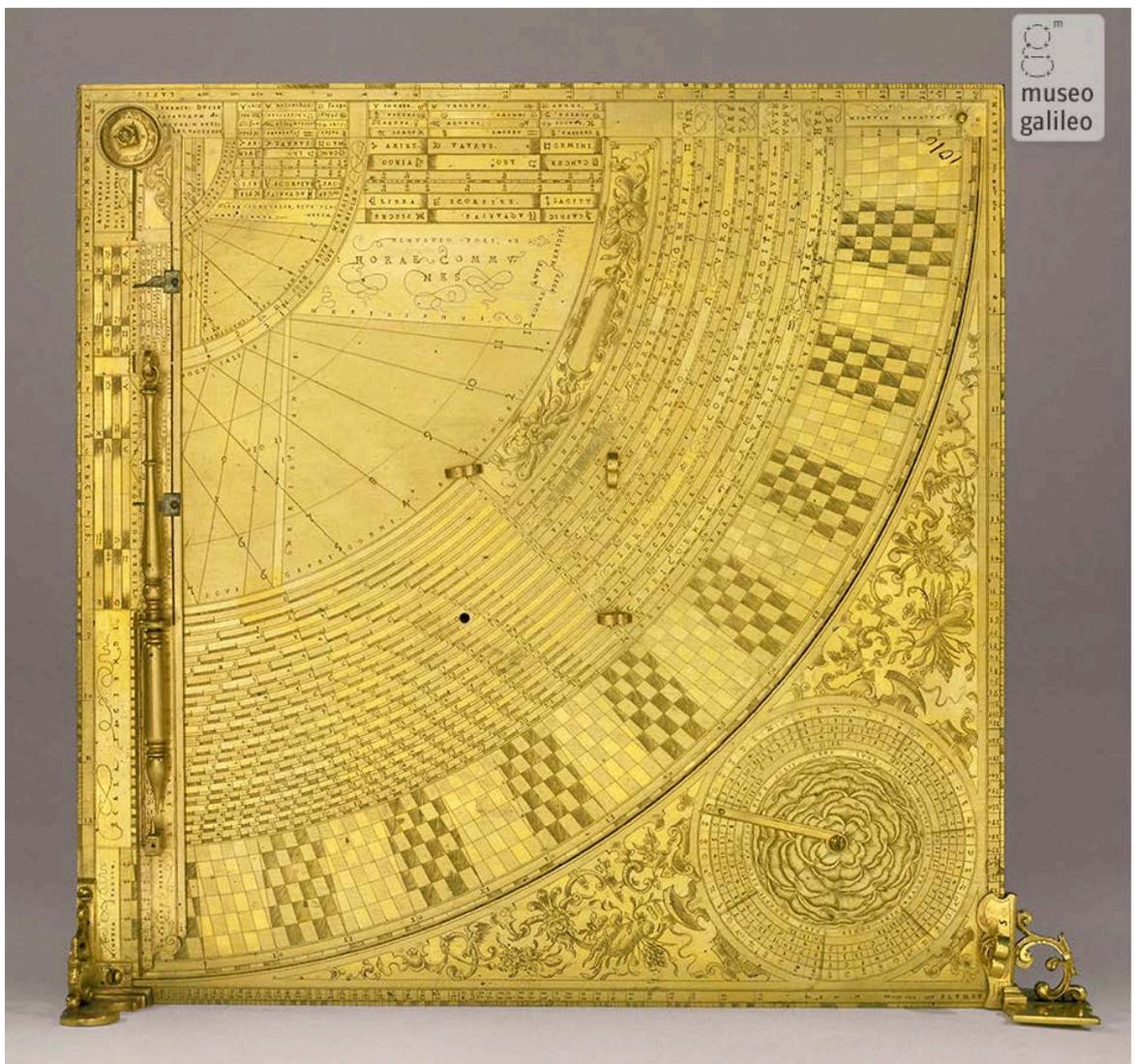


FIGURE 10 – Le splendide cadran à double limbe de Tobias Volckmer (musée des sciences de Florence).